

DOI: 10.25558/VOSTNII.2022.61.46.004

УДК 622.272:516.02

© С.В. Черданцев, П.А. Шлапаков, А.Ю. Ерастов, К.С. Лебедев, С.А. Хаймин,
В.В. Колыхалов, 2022

С.В. ЧЕРДАНЦЕВ

д-р техн. наук,
ведущий научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: svch01@yandex.ru



П.А. ШЛАПАКОВ

канд. техн. наук,
заведующий лабораторией
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: shlapak1978@mail.ru



А.Ю. ЕРАСТОВ

старший научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: eractov_a_y@mail.ru



К.С. ЛЕБЕДЕВ

научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: lebedevks1987@yandex.ru



С.А. ХАЙМИН

старший научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: hsa007@mail.ru



В.В. КОЛЫХАЛОВ

старший научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: X77kem@mail.ru



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ГОРЕНИЯ ГАЗОВОЗДУШНЫХ СМЕСЕЙ ПРИ УСЛОВИИ РАВЕНСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ

Непрерывным атрибутом при разработке угольных месторождений подземным способом является метан, опасность которого проявляется двояко. С одной стороны, являясь газообразной субстанцией, метан негативно проявляется в различных аэро- и газодинамических процессах, в первую очередь, внезапных выбросах в горные выработки. С другой стороны, смешиваясь с воздушными потоками в рудничной атмосфере, метан образует газозвушные смеси, которые предрасположены к химическому реагированию, проявляющемуся в форме горения или детонации, что в условиях угольных шахт может привести к катастрофическим последствиям. В данной работе рассматривается задача о стационарном процессе горения газозвушной смеси в атмосфере горной выработки. Предполагается, что единственным источником тепловыделения является термохимическая реакция окисления метана. В статье обсуждается частный случай, когда коэффициенты температуропроводности и диффузии газозвушной смеси равны между собой, в связи с чем температурные и диффузионные поля могут быть описаны с помощью краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, которое преобразовано к двум задачам Коши для уравнений первого порядка. Решения задач Коши построены численно с помощью метода Гира.

Ключевые слова: ГОРНЫЕ ВЫРАБОТКИ, ГАЗОВОЗДУШНЫЕ СМЕСИ, УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ, СКОРОСТЬ ПРОТЕКАНИЯ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ, ЗАКОН АРРЕНИУСА, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ЗАДАЧА КОШИ, МЕТОД ГИРА.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе работы проходческих и очистных комбайнов в горных выработках неизбежно образуется угольная пыль, а из разрушенного угля выделяется метан. В результате взаимодействия с воздушной атмосферой выработок образуются газозвушные смеси в составе метан – воздух. Если к газозвушным смесям добавляется угольная пыль, то образуются пылегазовоздушные смеси.

Газозвушные смеси в горных выработках, как правило, разбавляются и отводятся на поверхность за счет системы шахтной вентиляции и поэтому количество газа во время нормального режима эксплуатации удерживается значительно ниже минимальной концентрации, при которой может произойти воспламенение смеси. Однако при внезапных выбросах больших объемов газа пределы его допустимой концентрации могут быть существенно превышены.

Пылегазовоздушные смеси обычно ней-

трализуются в зоне источника пыли распылением воды, системами пылеподавления горных машин, а также обработкой смесей инертной пылью. Тем не менее, в угольных шахтах существует опасность взрыва угольной пыли как в составе пылегазовоздушной смеси, так и в виде осевших слоев, которые могут быть взвешены в атмосфере выработок в результате взрыва метана. В последнем случае мощность взрыва может многократно увеличиваться за счет возгорания все большего количества пылегазовоздушной смеси по мере того, как горение распространяется по выработке.

Так, по данным профессора В.С. Зыкова [1], в период с 1992 по 2021 гг. на шахтах Кузбасса в результате взрывов метана и метанозвушной смеси произошло более 30 аварий, наиболее крупные из которых с многочисленными человеческими жертвами произошли на шахтах Ульяновской (г. Новокузнецк), Распадской (г. Междуреченск), Листвяжной (г. Белово).

Таким образом, наиболее опасными явлениями при разработке угольных месторождений подземным способом, на наш взгляд, являются детонационные и дефлаграционные процессы, обусловленные термодинамическими процессами в газо- и пылегазовоздушных смесях.

Хорошо известно, что процесс горения является, прежде всего, химическим процессом, поскольку он сопровождается превращением веществ [2]. Однако при его внимательном рассмотрении оказывается, что во многих случаях, имеющих принципиальное значение, процесс горения подчиняется, в первую очередь, чисто физическим закономерностям [3, 4, 5]. Такое положение оказывается следствием того, что развитие химического превращения не происходит независимо, а связано с различными физическими явлениями. Вследствие этого протекание химических реакций горения оказывается подчиненным более медленным физическим процессам, таким как перенос тепла, диффузия, конвекция, излучение [6, 7]. В силу этого, химические превращения, обладая очень большими скоростями протекания, во многих случаях подчиняются различным физическим процессам, протекающим с меньшими скоростями.

В данной статье рассматриваются задача о горении газозвудушных смесей в горных выработках. При зажигании холодных смесей посредством, например, искры, обладающей достаточной мощностью, создается зона повышенной температуры, в которой начинается быстрое протекание химической реакции, обуславливая появление небольшого очага пламени. Для того, чтобы горение распространилось дальше по всему объему холодной смеси, необходимо, чтобы из области очага определенное количество тепла передалось в соседние слои газа и нагрело их до нужной температуры. Очевидно, что в этом случае скорость сгорания смеси будет характеризоваться, в первую очередь, скоростью распространения тепла.

Далее мы сделаем краткий обзор наиболее значимых работ, с нашей точки зрения, опубликованных за последние годы.

Так, в работе [8] экспериментально исследована скорость ламинарного пламени в облаках пыли в зависимости от физико-химических параметров пыли и газодинамических условий распространения пламени. Выявлены наиболее значимые причины неустойчивости ламинарного пламени и процессов перехода в турбулентный режим горения пыли.

В работах [9, 10] получено аналитическое выражение для нормальной скорости распространения пламени, описывающее ее зависимость от концентраций горючего и окислителя и от размера частиц. Проведены оценки относительной роли радиационной теплопередачи и седиментации частиц во взвеси.

В статьях [11, 12] выполнен сравнительный анализ теоретических и экспериментальных данных о параметрах горения в различных газо- и пылегазовоздушных смесях на угольных шахтах и рассмотрены возможные случаи воспламенений и взрывов в шахтах.

В статье [13] получены формулы и построены графики для вычисления скорости и толщины зоны ламинарного горения смеси. Анализ графиков позволил выявить влияние удельного количества теплоты, коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости на скорость и толщину зоны горения смеси.

В работе [14] выявлено, что процесс горения мелкодисперсных пылегазовоздушных смесей в диффузионной области имеет место при условии, если концентрация окислителя в зоне горения изменяется экспоненциально.

В работе [15] рассмотрено влияние очагов самонагрева на различные режимы горения мелкодисперсных пылегазовоздушных смесей в горных выработках. Получены формулы и построены графики, на базе которых обнаружены некоторые закономерности протекания процесса горения смесей в горных выработках вблизи очагов самонагрева.

В работе [16] представлены результаты измерения скорости детонационной волны на границе раздела взрывчатого вещества и инертного окна из оргстекла. Получены значения химпиков и выявлен неклассический механизм взрывного горения.

В статье [17] обнаружено нарушение ре-

гулярности структуры волн непрерывной детонации и их скорости с уменьшением доли водорода в двухкомпонентном горючем. Получены нижние пределы детонации по массовой доле водорода в составе горючего метан/водород.

При постановке задачи о горении газовоздушных смесей в горных выработках и построении ее решения в данной статье нами приняты следующие допущения:

1) химическая реакция предполагается одноступенчатой, протекающей без отдельных элементарных реакций, а исходные реагенты и продукты реакции являются идеальными газами;

2) рассматривается стационарный процесс горения;

3) теплообмен внутри зоны горения осуществляется только за счет теплопроводности и конвекции, без учета лучистого теплообмена.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ГОРЕНИИ ГАЗОВОЗДУШНОЙ СМЕСИ В ГОРНОЙ ВЫРАБОТКЕ

Рассмотрим химическую реакцию горения метана в рудничной атмосфере, которая описывается следующим термохимическим уравнением [2]



Таким образом, в результате реакции сгорания одного моля метана образуются один моль углекислого газа, два моля воды и выделяется 880 кДж тепловой энергии.

Один из основных постулатов теории горения состоит в том, что, если процесс горения начался в одном месте, он оказывается способным распространяться в пространстве, где находится горючая смесь. Существуют два принципиально различных вида распространения пламени, первый из которых называют дефлаграцией или нормальным распространением пламени. Другой вид называют детонацией, при которой распространение пламени обусловлено возбуждением реакции в горючей смеси, распространяющейся по ней ударной волной.

Здесь мы будем обсуждать только задачу о нормальном распространении пламени. Эту задачу можно назвать комплексной задачей, состоящей из ряда более узких задач, базирующихся на уравнениях химической кинетики, теплопроводности и диффузии.

Исходным в теории горения является уравнение теплопроводности в среде с непрерывно распределенными источниками тепла, обусловленными тепловыделением при протекании химической реакции. Уравнение стационарной теплопроводности вытекает из закона сохранения энергии [3–7]:

$$a\nabla^2 T - \vec{v} \cdot \nabla T + \frac{q}{c_p \rho} = 0, \quad (2)$$

показывающего, что количество теплоты, затрачиваемое на изменение температуры области V , равно притоку теплоты за счет теплового источника q и расходу теплоты за счет выходящего теплового потока. В уравнении (2) приняты следующие обозначения: T — температура смеси внутри области V ; a — коэффициент температуропроводности смеси, определяемый как $a = \lambda / (c_p \rho)$, где c_p — удельная теплоемкость смеси в изобарном процессе; ρ — ее плотность, λ — коэффициент теплопроводности, который далее будем полагать постоянной величиной; ∇ , \vec{v} — соответственно оператор Гамильтона и вектор скорости течения смеси в рассматриваемой области, определяемые по формулам [18]

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

где v_x, v_y, v_z — координаты вектора скорости.

Величина притока тепла q определяется по формуле [3, 4]

$$q = Q \cdot W, \quad (3)$$

где Q — тепловой эффект реакции, а W — ее скорость, которая зависит от температуры протекающей реакции и концентрации реагирующих веществ. Поэтому скорость реакции можно представить как произведение

двух функций, одна из которых представляет собой функцию температуры $W(T)$, а другая — концентрации $W(c)$ [2]

$$W = W(T, c) = W(T) \cdot W(c), \quad (4)$$

Функция $W(T)$, как правило, описывается законом Аррениуса [2, 3]

$$W(T) = k_0 e^{-E/RT}, \quad (5)$$

где k_0 — предэкспоненциальный множитель; E — энергия активации, представляющая собой количество энергии, которое необходимо для протекания реакции; R — газовая постоянная.

Функция $W(c)$ в формуле (4) определяется количеством элементарных химических актов, которые происходят в единице объема за единицу времени [2]. Чтобы частицы реагента вступили в реакцию, они должны встретиться, а вероятность встречи прямо пропорциональна произведению их концентраций. Поэтому скорость реакции должна быть прямо пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ. В общем случае скорость реакции зависит от концентраций реагентов в виде произведения степенных функций [2, 3]

$$W(c) = c_A^{n_A} \cdot c_B^{n_B} \dots = \prod_i c_i^{n_i}, \quad (6)$$

где показатели степени n_A, n_B, \dots, n_i называют частными порядками реакции соответственно по реагентам A, B и т. д.; c_A, c_B, \dots — молярные концентрации реагентов, участвующих в реакции. Показатели n_A, n_B, \dots представляют собой число частиц реагентов A, B, \dots , участвующих в реакции. Общий порядок реакции равен $n = \sum n_i$.

Анализируя химическую реакцию (1), замечаем, что в ней участвует одна молекула метана и две молекулы кислорода. Следовательно, $n_A = 1, n_B = 2$, поэтому по метану порядок реакции первый, по кислороду второй и, соответственно, формула (6) приводится к виду:

$$W(c) = c_A \cdot c_B^2. \quad (7)$$

На основании принятого допущения об идеальности газов, участвующих в реакции (1), находим молярные концентрации углерода и кислорода по формулам [2]

$$c_A = \frac{\rho_{Aa} m_A}{M_A}, \quad c_B = \frac{\rho_{Ba} m_B}{M_B}, \quad (8)$$

где $M_A = 16$ г/моль, $M_B = 32$ г/моль — молярные массы соответственно метана и кислорода; ρ_{Aa}, ρ_{Ba} — их плотности при начальной температуре T_0 , а m_A, m_B — относительные массы углерода и кислорода в уравнении (1), которые соответственно равны $m_A = 1/3, m_B = 2/3$.

Подставляя формулы (5) и (7) в равенство (4), получаем формулу для определения скорости реакции окисления метана:

$$W = k_0 c_A c_B^2 \cdot e^{-E/RT}. \quad (9)$$

Из закона Аррениуса (5) следует, во-первых, скорость реакции всегда нелинейно зависит от температуры. Эта нелинейность является важнейшей особенностью процессов горения. Во-вторых, скорость химической реакции никогда не обращается в ноль. Она только экспоненциально падает с понижением температуры, и поэтому, как бы низка ни была начальная температура смеси, — эта смесь все равно прореагирует за длительный промежуток времени.

Из сказанного вытекает, что процесс горения не может быть стационарным, поскольку скорость реакции при любой температуре не равна нулю. Если же допустить, что скорость реакции равна нулю при начальной температуре, то процесс горения в начальный момент времени можно считать стационарным, однако он будет неустойчивым, так как стационарность нарушится от любого малого начального возмущения. Кроме этого, для обеспечения стационарности процесса необходимо полагать, что скорость реакции равна нулю еще и при конечной температуре, большей начальной температуры T_0 .

Чтобы исключить описанную неопределенность воспользуемся методом, предложенным автором [3], следуя которому вначале преобразуем показатель степени в формуле (5) к виду:

$$\frac{E}{RT} = \frac{E}{R(T+T_*-T_*)} = \frac{E}{RT_*} \frac{1}{1+\frac{\Delta T}{T_*}} = \frac{E}{RT_*} \frac{1+\frac{\Delta T}{T_*}-\frac{\Delta T}{T_*}}{1+\frac{\Delta T}{T_*}} = \frac{E}{RT_*} - \frac{E \cdot \Delta T}{RT_*^2} \frac{1}{1+\frac{\Delta T}{T_*}}, \quad (10)$$

где $\Delta T = T - T_*$, а T_* — является температурой, вблизи которой происходит химическое реагирование.

Обозначив в формуле (10)

$$\Theta = \frac{E \cdot \Delta T}{RT_*^2}, \quad (11)$$

преобразуем ее следующим образом:

$$\frac{E}{RT} = \frac{E}{RT_*} - \frac{\Theta}{1+\frac{\Delta T}{T_*}}. \quad (12)$$

Следуя далее работе [3], мы учтем, что при горении, откуда, в силу чего будем полагать $1 + \Delta T / T_* \approx 1$. Тогда формула (12) упрощается:

$$\frac{E}{RT} = \frac{E}{RT_*} - \Theta \frac{1}{1+\frac{\Delta T}{T_*}} \approx \frac{E}{RT_*} - \Theta, \quad (13)$$

а показатель степени в формуле (5) можно представить следующим образом:

$$e^{-\frac{E}{RT}} \approx e^{-\frac{E}{RT_*}} \cdot e^{\Theta}. \quad (14)$$

Полученные формулы можно использовать как в задачах о самовоспламенении смеси, так и в задачах о ее горении. Так, в зада-

чах о самовоспламенении за температуру T_* следует принять начальную температуру смеси T_0 , а для исследования процесса горения температуру T_* необходимо заменить максимальной температурой горения T_{\max} . Исходя из сказанного, значение Θ_{\max} мы можем определить по формуле (11) следующим образом:

$$\Theta_{\max} = \frac{E \cdot \Delta T_{\max}}{RT_{\max}^2} = \frac{E \cdot (T_{\max} - T_0)}{RT_{\max}^2}. \quad (15)$$

Подставив формулу (3) в уравнение (2), приходим к следующему уравнению:

$$a \nabla^2 T - \vec{v} \cdot \nabla T + \frac{Q}{c_p \rho} W = 0, \quad (16)$$

где скорость реакции W будем определять по формуле (9) с учетом формулы (14).

Как известно, процесс распространения горения в газоздушных смесях обусловлен не только передачей тепла, но также передачей окислителя в зону реакции, осуществляемой посредством диффузии [2, 3, 5].

Поскольку смесь состоит, как правило, из несколько компонентов, то для каждого из них необходимо составить уравнение диффузии. Так, для i -го компонента смеси стационарное уравнение диффузии представляется в виде [2]:

$$D_i \nabla^2 c_i - \vec{v} \cdot \nabla c_i \pm W_i = 0, \quad (17)$$

где c_i — концентрация i -го компонента, D_i — его коэффициент диффузии. Величину W_i мы определяем по формуле (9), учитывая при этом, что предэкспоненциальный множитель и энергия активации i -го компонента соответственно равны $k_{0(i)}$, E_i . Знак «плюс» в правой части соответствует продуктам реакции, а «минус» — исходным веществам. Поскольку дальнейший расчет процесса горения мы будем выполнять на основе исходных компонентов, то в уравнении (17) будем учитывать знак «минус».

Как известно, время протекания реакции t_r можно определить по формуле [3]

$$t_r = \frac{c_A^{(0)} - c_A^{(k)}}{W}, \quad (18)$$

где $c_A^{(0)}$ — начальная концентрация одного из исходных компонентов, на моль которого рассчитана кинетика реакции; $c_A^{(k)}$ — конечная концентрации, которую можно положить $c_A^{(k)} = 0$, поскольку исходные компоненты превращаются в продукты реакции. Тогда уравнение (17), представляется в виде:

$$D_A \nabla^2 c_A - \vec{v} \cdot \nabla c_A - \frac{c_A^{(0)}}{t_r} = 0. \quad (19)$$

Известно, что максимальную температуру горения можно вычислить по формуле [3, 4]

$$T_{\max} = T_0 + \frac{Q}{c_p \rho} c_A^{(0)},$$

из которой вытекает равенство

$$\frac{Q}{c_p \rho} = \frac{T_{\max} - T_0}{c_A^{(0)}}, \quad (20)$$

учитывая которое, а также формулу (18), преобразуем уравнение (16) к виду:

$$a \nabla^2 T - \vec{v} \cdot \nabla T + \frac{T_{\max} - T_0}{t_r} = 0. \quad (21)$$

Таким образом, в общем случае, процесс горения описывается системой уравнений состоящей из уравнения теплопроводности (21) и уравнения диффузии (19), которые для условия горной выработки, являющейся одномерной областью, представляются в виде:

$$a \frac{d^2 T}{dx^2} - v_x \frac{dT}{dx} + \frac{T_m - T_0}{t_r} = 0, \\ D_A \frac{d^2 c_A}{dx^2} - v_x \frac{dc_A}{dx} - \frac{c_A^{(0)}}{t_r} = 0. \quad (22)$$

где x — координата, совпадающая с продольной осью выработки, а v_x — скорость движения газозвушной смеси по выработке.

Разделив первое уравнение (22) на $(T_{\max} - T_0)$, второе уравнение на $c_A^{(0)}$ и переходя к безразмерным величинам

$$\xi_1 = \frac{T - T_0}{T_{\max} - T_0}, \quad \xi_2 = \frac{c_A^{(0)} - c_A}{c_A^{(0)}}, \quad (23)$$

принадлежащим одинаковым отрезкам $\xi_1 \in [0; 1]$, $\xi_2 \in [0; 1]$, приведем уравнения (22) к виду:

$$a \frac{d^2 \xi_1}{dx^2} - v_x \frac{d\xi_1}{dx} + \frac{1}{t_r} = 0, \\ D_A \frac{d^2 \xi_2}{dx^2} - v_x \frac{d\xi_2}{dx} + \frac{1}{t_r} = 0. \quad (24)$$

Как известно [3], для большинства газов и газовых смесей коэффициенты температуропроводности и диффузии являются малыми величинами, а их численные значения незначительно отличаются друг от друга. Здесь же мы будем полагать, что они равны между собой. Тогда, вычитая из первого уравнения (24) второе, получим однородное уравнение:

$$a \frac{d^2 \eta}{dx^2} - v_x \frac{d\eta}{dx} = 0 \quad (25)$$

относительно величины η , определяемой как $\eta = \xi_1 - \xi_2$. Легко заметить, что длина отрезка η равна нулю, поскольку в начале и в конце процесса $\eta = 0$. Следовательно, уравнение (25) имеет тривиальное решение $\eta \equiv 0$, и поэтому уравнения системы (24) тождественны друг другу, в силу чего функции ξ_1 , ξ_2 равны между собой. Принимая $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, мы можем объединить формулы (23) в одну

$$\xi = \frac{T - T_0}{T_{\max} - T_0}, \quad \xi = \frac{c_A^{(0)} - c_A}{c_A^{(0)}} \quad (26)$$

и рассмотреть лишь одно уравнение системы (24), например, первое:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} - \mu \frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{t_r \cdot a} = 0, \quad (27)$$

где параметр μ определяется как

$$\mu = \frac{v_x}{a}, \quad (28)$$

а время реакции t_r является функцией $t_r = t_r(\xi)$.

Сопоставляя формулы (18) и (9), найдем величину

$$\frac{1}{t_r} = k_0 \cdot c_B^2 \cdot e^{-E/RT},$$

где функцию $e^{-E/RT}$ мы представим с помощью приближенной формулы (14), в которой температуру T_* заменим на температуру T_{\max}

$$\frac{1}{t_r} = k_0 \cdot c_B^2 \cdot e^{\frac{-E}{RT_{\max}}} \cdot e^{\Theta}, \quad (29)$$

а показатель Θ , определяемый по формуле (11), преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{E(T - T_{\max})}{RT_{\max}^2} = \frac{-E(T_{\max} - T + T_0 - T_0)}{RT_{\max}^2} = \\ &= \frac{-E(T_{\max} - T_0)}{RT_{\max}^2} \left(1 - \frac{T - T_0}{T_{\max} - T_0} \right) = -\Theta_{\max} (1 - \xi) \end{aligned}$$

и перепишем формулу (29):

$$\frac{1}{t_r} = k_0 \cdot c_B^2 \cdot e^{-E/RT_{\max}} \cdot e^{-\Theta_{\max} (1 - \xi)},$$

в связи с чем уравнение (27) представим как:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} - \mu \frac{d\xi}{dx} + B \cdot e^{-\Theta_{\max} (1 - \xi)} = 0, \quad (30)$$

где

$$B = \frac{k_0 \cdot c_B^2}{a} \cdot e^{-E/RT_{\max}}, \quad (31)$$

а величина Θ_{\max} определяется по формуле (15).

Поскольку в начальной точке области горения $T = T_0$, а в конечной $T = T_{\max}$, то из фор-

мул (23) и (26) следуют выражения:

$$\xi|_{x=0} = 0, \quad \xi|_{x=L} = 1, \quad (32)$$

представляющие собой граничные условия для уравнения (30).

Уравнение (30) и граничные условия (32) образуют краевую задачу, искомые решения которой $\xi(x)$ являются собственными функциями, а соответствующие им значения параметра μ представляют собой собственные значения (числа) рассматриваемой задачи [19, 20].

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ГОРЕНИИ ГАЗОВОЗДУШНОЙ СМЕСИ В ГОРНОЙ ВЫРАБОТКЕ

Обратим внимание, что уравнение (30) является автономным, поскольку не содержит в явном виде независимую переменную x . Это позволяет с помощью подстановки [19, 20]

$$\frac{d\xi}{dx} = \psi(\xi) \quad (33)$$

понизить порядок уравнения (30) и привести его к виду:

$$\psi \frac{d\psi}{d\xi} - \mu\psi + \Phi(\xi) = 0, \quad (34)$$

где

$$\Phi(\xi) = B \cdot e^{-\Theta_{\max} (1 - \xi)}. \quad (35)$$

Поскольку уравнение (34) имеет первый порядок, то оно должно удовлетворять только одному граничному условия, например, в точке $\xi = 0$. Однако значение функции ψ в этой точке нам заранее неизвестно, но при этом мы можем утверждать, что граничное условие не является однородным, поскольку заданная функция $\Phi|_{\xi=0} \neq 0$ и, следовательно, уравнение (34) в точке $\xi = 0$ тождественно не удовлетворяется. Вычислить же значение функции $\psi|_{\xi=0}$ не представляется возможным, поскольку уравнение (34) является нелинейным.

Поэтому для вычисления $\psi|_{\xi=0}$ воспользуемся следующим предположением. Поскольку реакция горения начинается толь-

ко при температуре зажигания T_z , а при $T < T_z$ реакция горения не происходит, то теплота не выделяется, в силу чего $Q \approx 0$ и, следовательно, тепловой источник q отсутствует. Это означает, что рассматриваемая область состоит из двух зон, в одной из которых происходит подогрев смеси, а в другой протекает химическая реакция горения (рис. 1).

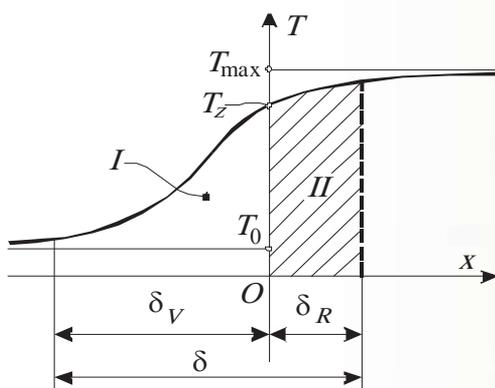


Рис. 1. Распределение температуры в области горения газовой смеси

В соответствии с этим, искомую функцию ψ можно представить как

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \quad (36)$$

где ψ_1 — искомая функция в зоне подогрева, а ψ_2 — искомая функция в зоне горения.

Поскольку в зоне подогрева тепловой источник отсутствует, то функция $\Phi(\xi) \equiv 0$. В силу сказанного, уравнение (34) для отыскания функции ψ_1 существенно упрощается:

$$\psi_1 \frac{d\psi_1}{d\xi} - \mu\psi_1 = 0. \quad (37)$$

В зоне горения $T \in [T_z; T_{\max}]$, производная dT/dx является малой величиной, поскольку температура зажигания T_z и максимальная температура T_{\max} отличаются друг от друга незначительно (рис. 1).

По этой причине функция $\psi = d\xi/dx$ также является малой величиной, в то время как производная $d\psi/dx$ может быть значительной [3, 4]. Поэтому, пренебрегая в уравнении (34) слагаемым $\psi = d\xi/dx$ по сравнению с другими членами, получим уравнение:

$$\psi_2 \frac{d\psi_2}{d\xi} + \Phi(\xi) = 0 \quad (38)$$

относительно искомой функции ψ_2 .

Решением уравнения (37) является функция

$$\psi_1 = \mu \cdot \xi, \quad (39)$$

в чем легко убедиться, подставив (39) в уравнение (37). Переписав уравнение (38) в виде:

$$\frac{1}{2} \frac{d\psi_2^2}{d\xi} = -\Phi(\xi),$$

находим его решение:

$$\psi_2 = \sqrt{-2 \int_{\xi}^1 \Phi(\xi) d\xi}, \quad (40)$$

где ξ — некоторая текущая величина в зоне горения.

Обратим внимание, что в точке $\xi = 0$ определяемая по формуле (39) функция $\psi_1 = 0$ и, следовательно, согласно формуле (36) $\psi = \psi_2$. Поэтому для определения $\psi_2|_{\xi=0}$ нам необходимо найти интеграл в формуле (40) только на нижней границе при $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} \psi|_{\xi=0} = \psi_2|_{\xi=0} &= \sqrt{2 \left(\int \Phi(\xi) d\xi \right) \Big|_{\xi=0}} = \\ &= \sqrt{2B \cdot \left(\int e^{-\Theta_{\max}(1-\xi)} d\xi \right) \Big|_{\xi=0}} = \\ &= \sqrt{2B \cdot \frac{e^{-\Theta_{\max}}}{\Theta_{\max}}} \end{aligned} \quad (41)$$

Поскольку рассматриваемая область состоит из зоны подогрева и зоны горения, то границей между этими зонами является точка $\xi = \xi_z$, в которой происходит зажигание смеси. Значение ξ_z вычислим с помощью формулы (26), в которой будем полагать $\xi = \xi_z$, $T = T_z$, начальную температуру метановоздушной

смеси $T_0 = 300$ °K, температуру зажигания и максимальную температуру горения соответственно $T_z = 1670$ °K, $T_{\max} = 1970$ °K. В результате найдем $\xi_z = 0,82$.

Поскольку $\psi(\xi)$ является непрерывной функцией, то в точке ξ_z должно выполняться условие сопряжения:

$$\psi_1(\xi_z) = \psi_2(\xi_z),$$

подставив в которое формулы (39) и (40), получим равенство:

$$\mu \cdot \xi_z = \sqrt{-2 \int_{\xi_z}^1 \Phi(\xi) d\xi},$$

из которого, с учетом формулы (35), определяем собственное значение:

$$\mu = \frac{\sqrt{2}}{\xi_z} \sqrt{\frac{B}{\Theta_{\max}} \cdot [1 - e^{\Theta_{\max}(\xi_z - 1)}]}, \quad (42)$$

в силу чего задача Коши (34), (41) становится вполне определенной.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Поскольку рассматриваемая задача Коши является нелинейной, то получить ее решение в квадратурах не представляется возможным, поэтому мы построили решение методом Гира [21], а вычислительные процедуры выполнили с помощью программы Maple V Power Edition [22].

В качестве исходных данных для ее решения приняты следующие значения: $R = 8,314$ Дж/(К·моль); $k_0 = 3,5 \cdot 10^3$ с⁻¹; $E = 133 \cdot 10^3$ Дж/моль; $Q = 55 \cdot 10^6$ Дж/м³; $\rho = 0,97$ кг/м³; $\rho_A = 0,6682$ кг/м³; $\rho_B = 1,225$ кг/м³; $\lambda = 0,0341$ Вт/(м·K); $c_p = 2,252 \cdot 10^3$ Дж/(кг·K); $T_0 = 300$ °K; $T_z = 1670$ °K; $T_{\max} = 1970$ °K, где исходные значения параметров смеси приняты при температуре T_0 .

Вычисления начнем с определения коэффициента температуропроводности:

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho} = \frac{0,0341}{2,252 \cdot 10^3 \cdot 0,6682} = 2,266 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$$

и молярных концентраций веществ, участвовавших в реакции (1), используя формулы (8):

$$c_A = \frac{0,6682 \text{ кг/м}^3 \cdot 1/3}{16 \text{ г/моль}} = \frac{0,6682 \text{ кг/м}^3 \cdot 1/3}{16 \cdot 10^{-3} \text{ кг/0,0224 м}^3} = 0,312,$$

$$c_B = \frac{1,225 \text{ кг/м}^3 \cdot 2/3}{32 \text{ г/моль}} = \frac{1,225 \text{ кг/м}^3 \cdot 2/3}{32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/0,0224 м}^3} = 0,572$$

Затем по формуле (15) вычисляем Θ_{\max}

$$\Theta_{\max} = \frac{133 \cdot 10^3}{8,314 \cdot 1970^2} (1970 - 300) = 6,884,$$

по формуле (31) — параметр B :

$$B = \frac{3,5 \cdot 10^3 \cdot 0,572^2}{2,266 \cdot 10^{-5}} e^{-\frac{133 \cdot 10^3}{8,314 \cdot 1970}} = 1,501 \cdot 10^4 \text{ м}^{-2}.$$

Поскольку значение $\xi_z = 0,82$ нами вычислено ранее, то, используя формулы (41) и (42), вычисляем граничное значение $\psi|_{\xi=0}$ и собственное значение μ :

$$\psi|_{\xi=0} = \sqrt{2 \cdot 1,503 \cdot 10^4 \cdot \frac{e^{-6,884}}{6,884}} = 2,114,$$

$$\mu = \frac{\sqrt{2}}{0,82} \sqrt{\frac{1,501 \cdot 10^4}{6,884} \cdot [1 - e^{6,884(0,82-1)}]} = 67,817 \text{ м}^{-1}.$$

Зная μ , по формуле (28) находим скорость течения газовой смеси:

$$v_x = 67,817 \cdot 2,266 \cdot 10^{-5} = 1,537 \cdot 10^{-3},$$

при заданных ее параметрах.

С учетом вычисленных значений задача

Коши (34), (41) представляется в виде:

$$\psi \frac{d\psi}{d\xi} - 67,817\psi + 1,501 \cdot 10^4 \cdot e^{-6,884(1-\xi)} = 0, \quad \psi|_{\xi=0} = 2,114 \text{ м}^{-1}, \quad (43)$$

а ее решение, построенное методом Гира, дано в таблице.

Таблица 1

Значения искомой функции ψ , вычисленные методом Гира

ξ	0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,9	1,0
ψ	8,96	15,887	22,716	29,332	35,55	41,04	45,153	46,508	41,539	1,295

Особо отметим, что сформулированная задача Коши имеет решение, если собственное значение $\mu \geq 67,817 \text{ м}^{-1}$, которое мы определили по формуле (42). Из сказанного вытекает, что стационарный процесс горения газовой смеси происходит только в том случае, если скорость ее движения больше полученного значения v_x . Поскольку в реальных шахтных условиях скорость воздушного потока в горных выработках составляет несколько метров в секунду, превосходя полученное значение v_x на несколько порядков, то, очевидно, что процесс горения газовой смеси в горных выработках возможен практически всегда.

Разделив переменные в уравнении (33) и проинтегрировав его при переменных верхних пределах, определяем значение координаты x области горения:

$$x = \int_{\xi=0}^{\xi} \frac{d\xi}{\psi(\xi)}, \quad (45)$$

в которой безразмерная температура смеси составляет величину ξ .

Поскольку функция $\psi(\xi)$ найдена не в аналитической форме, а в табличной, то интеграл в формуле (45) заменим суммой, а дифференциал $d\xi$ заменим конечной разностью:

$$x = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta \xi_i}{\psi(\xi_{i,m})}, \quad \Delta \xi = \xi_{i,r} - \xi_{i,l}, \quad (46)$$

где $\xi_{i,r}$, $\xi_{i,l}$ — абсциссы соответственно правого и левого конца i -го участка, а $\xi_{i,m}$ — абсцисса его середины, n — количество элементов разбиения, для вычисления произвольной координаты x . Очевидно, что $n = 10$ соответствует длине области горения L . Значения функции ψ в точках $\xi_{i,r}$, $\xi_{i,l}$ даны в таблице, а значение ψ в точке $\xi_{i,m}$ определяем путем линейной интерполяции

$$\psi(\xi_{i,m}) = \psi(\xi_{i,l}) + \frac{\psi(\xi_{i,r}) - \psi(\xi_{i,l})}{2} = \frac{\psi(\xi_{i,r}) + \psi(\xi_{i,l})}{2}. \quad (47)$$

Подставляя формулу (47) в равенство (46) и принимая $n = 10$, определим искомую длину L области горения:

$$L = \sum_{i=0}^{n=10} \frac{\xi_{i,r} - \xi_{i,l}}{\psi(\xi_{i,m})} = 0,052 \text{ м}.$$

Используя полученные формулы, можно также определить координату сечения с наперед заданной температурой или вычислить температуру смеси в фиксированном месте области горения.

ВЫВОДЫ

1. Сформулирована краевая задача для автономного уравнения второго порядка, описывающая процесс горения газовой смеси

смеси в атмосфере горных выработок.

2. Получена приближенная формула, позволяющая вычислять собственные значения процесса горения в горных выработках.

3. Краевая задача сведена к двум задачам Коши для уравнений первого порядка, и най-

дены их решения методом Гира.

4. На базе построенных решений задач Коши разработан алгоритм, позволяющий определить температуру газозооной смеси в любой точке области горения, а также вычислять ее длину.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зыков В.С., Филатов Ю.М. Проявление опасности по газодинамическим явлениям в очистных забоях угольных шахт // Научно-технические разработки и использования минеральных ресурсов. 2018. № 4. С. 441–445.

2. Денисов Е.Т., Саркисов О.М., Лихтенштейн Г.И. Химическая кинетика: Учебник для вузов. М.: Химия, 2000. 568 с.

3. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987. 502 с.

4. Канторович Б.В. Основы теории горения и газификации твердого топлива. М.: Книга по требованию, 2013. 601 с.

5. Bartlma A. Gasdynamik der verbrennung. Deutsche forschung and versuchsanstalt «Institut fur Reaktionskinetik». Stuttgart, 1975. 280 p.

6. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.

7. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

8. Shevchuk V.G., Kondratev E.N., Zolotko A.N., Sidorov A.E., Oparin A.S. Wave regimes of dust combustion // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2014. Vol. 50. Issue 1. P. 80–86.

9. Sidorov A.E., Shevchuk V.G. Laminar flame in fine-particle dusts // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2011. Vol. 47. Issue 5. P. 518–522.

10. Sidorov A.E., Shevchuk V.G., Kondratev E.N. Conductive-radiative model of a laminar flame in dust suspensions // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2013. Vol. 49. Issue 3. P. 257–263.

11. Vasilev A.A., Pinaev A.V., Trubisyn A.A., Crachev A.Y., Trotsyuk A.V., Fomin P.A., Trilis A.V. What is burning in coal mines: methane or coal dust? // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2017. Vol. 53. Issue 1. P. 8–14.

12. Васильев А.А., Васильев В.А. Расчетные и экспериментальные параметры горения и детонации смесей на основе метана и угольной пыли // Вестник Научного центра по безопасности работ в угольной промышленности. 2016. № 2. С. 8–39.

13. Черданцев С.В., Филатов Ю.М., Шлапаков П.А. Режимы диффузионного горения пылегазовоздушных смесей в атмосфере горных выработок // Уголь. 2020. № 2. С. 27–32.

14. Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Шлапаков Е.А., Лебедев К.С., Ерастов А.Ю. Теплофизические и газодинамические условия протекания процессов дефлаграции и детонации в пылегазовоздушных потоках горных выработок вблизи очагов самонагрева // Химическая физика и мезоскопия. 2019. № 2. С. 179–189.

15. Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Голоскоков С.И., Батраков Д.Н. Построение и реализация термической модели горения в рудничной атмосфере метановоздушной смеси с учетом ее кинетики // Безопасность труда в промышленности. 2021. № 9. С. 7–14.

16. Ershov A.P., Rubtsov I.A. Detonation of low-density explosives // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2019. Vol. 55. Issue 1. P. 114–120.

17. Bykovskii F.A., Zhdan S.A., Vedernikov E.F. Continuous detonation of methane/hydrogen-air mixtures in an annular cylindrical combustor // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2018. Vol. 54. Issue 4. P. 472–481.

18. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. СПб.: Издательство «Лань», 2005. 736 с.

19. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.

20. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.
21. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
22. Манзон Б.М. Maple V. Power Edition. М.: Информационно-издательский дом «Филин», 1998. 240 с.
-

DOI: 10.25558/VOSTNII.2022.61.46.004

UDC 622.272:516.02

**© S.V. Cherdantsev, P.A. Shlapakov, A.Yu. Erastov, K.S. Lebedev, S.A. Khaymin,
V.V. Kolykhalov 2022**

S.V. CHERDANTSEV

Doctor of Engineering Sciences,
Leading Researcher
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: svch01@yandex.ru

P.A. SHLAPAKOV

Candidate of Engineering Sciences,
Head of Laboratory
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: shlapak1978@mail.ru

A.Yu. ERASTOV

Senior Research Associate
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: erastov_a_y@mail.ru

K.S. LEBEDEV

Research Associate
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: lebedevks1987@yandex.ru

S.A. KHAYMIN

Senior Research Associate
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: hsa007@mail.ru

V.V. KOLYKHALOV

Senior Research Associate
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: X77kem@mail.ru

**MATHEMATICAL SIMULATION OF COMBUSTION PROCESS OF GAS-AIR MIXTURES
UNDER CONDITION OF EQUAL COEFFICIENTS OF TEMPERATURE CONDUCTIVITY
AND DIFFUSION**

Methane is an indispensable attribute in the development of coal deposits by the underground method,

the danger of which is manifested in two ways. On the one hand, being a gaseous substance, methane is negatively manifested in various aero- and gas-dynamic processes, primarily sudden emissions into mine workings. On the other hand, by mixing with air flows in the mine atmosphere, methane forms gas-air mixtures which are prone to chemical response manifested in the form of combustion or detonation, which can lead to catastrophic consequences under conditions of coal mines. This paper discusses the problem of the steady-state combustion process of the gas-air mixture in the mining atmosphere. It is assumed that the only source of heat generation is the thermochemical reaction of methane oxidation. The article discusses the special case where the coefficients of temperature conductivity and diffusion of the gas-air mixture are equal to each other, and therefore, temperature and diffusion fields can be described using the boundary problem for the ordinary second-order differential equation, which is transformed to two Cauchy problems for first-order equations. Cauchy problem solutions are built numerically using the Gere method.

Keywords: MINE WORKINGS, GAS-AIR MIXTURES, EQUATIONS OF THERMAL CONDUCTIVITY AND DIFFUSION, CHEMICAL REACTION RATE, ARRHENIUS LAW, EDGE PROBLEM, CAUCHY PROBLEM, GIRA METHOD.

REFERENCES

1. Zykov V.S., Filatov Yu.M. Manifestation of danger by gas-dynamic phenomena in the treatment faces of coal mines // High-tech technologies for the development and use of mineral resources [Naukoemkie tekhnologii razrabotki i ispolzovaniya mineralnyh resursov]. 2018. No. 4. P. 441–445. [In Russ.].
2. Denisov E.T., Sarkisov O.M., Lichtenstein G.I. Chemical kinetics: Textbook for universities. M.: Chemistry, 2000. 568 p. [In Russ.].
3. Frank-Kamenetsky D.A. Diffusion and heat transfer in chemical kinetics. M.: Nauka, 1987. 502 p. [In Russ.].
4. Kantorovich B.V. Fundamentals of the theory of gorenje and gasification of solid fuels. M.: Book on demand, 2013. 601 p. [In Russ.].
5. Bartlma A. Gasdynamik der verbrennung. Deutsche forschungs and versuchsanstalt «Institut fur Reaktionskinetik». Stuttgart, 1975. 280 p.
6. Kutateladze S.S. Fundamentals of the theory of heat transfer. M.: Atomizdat, 1979. 416 p. [In Russ.].
7. Lykov A.V. Theory of thermal conductivity. M.: Higher School, 1967. 600 p. [In Russ.].
8. Shevchuk V.G., Kondratev E.N., Zolotko A.N., Sidorov A.E., Oparin A.S. Wave regimes of dust combustion // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2014. Vol. 50. Issue 1. P. 80–86.
9. Sidorov A.E., Shevchuk V.G. Laminar flame in fine-particle dusts // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2011. Vol. 47. Issue 5. P. 518–522.
10. Sidorov A.E., Shevchuk V.G., Kondratev E.N. Conductive-radiative model of a laminar flame in dust suspensions // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2013. Vol. 49. Issue 3. P. 257–263.
11. Vasilev A.A., Pinaev A.V., Trubisyn A.A., Crachev A.Y., Trotsyuk A.V., Fomin P.A., Trilis A.V. What is burning in coal mines: methane or coal dust? // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2017. Vol. 53. Issue 1. P. 8–14.
12. Vasiliev A.A., Vasiliev V.A. Calculated and experimental parameters of gorenje and detonation of mixtures based on methane and coal dust // Bulletin of the Scientific Center for safety of work in the coal industry [Vestnik Nauchnogo centra po bezopasnosti rabot v ugolnoj promyshlennosti]. 2016. No. 2. P. 8–39. [In Russ.].
13. Cherdantsev S.V., Filatov Yu.M., Shlapakov P.A. Modes of diffusion gorenje dust-gas-air mixtures in the atmosphere of mining // Coal [Ugol]. 2020. No. 2. P. 27–32. [In Russ.].
14. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Shlapakov E.A., Lebedev K.S., Erastov A. Yu. Thermophysical and gas-dynamic conditions of deflagration and detonation processes in dust-gas-air flows of mine

workings near the foci of self-heating // Chemical physics and mesoscopy [Himicheskaya fizika i mezoskopiya]. 2019. No. 2. P. 179–189. [In Russ.].

15. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Goloskokov S.I., Batrakov D.N. Construction and implementation of a thermal model of gorenje in a mine atmosphere of a methane-air mixture taking into account its kinetics // Safety of labor in industry [Bezopasnost truda v promyshlennosti]. 2021. No. 9. P. 7–14. [In Russ.].

16. Ershov A.P., Rubtsov I.A. Detonation of low-density explosives // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2019. Vol. 55. Issue 1. P. 114–120.

17. Bykovskii F.A., Zhdan S.A., Vedernikov E.F. Continuous detonation of methane/hydrogen-air mixtures in an annular cylindrical combustor // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2018. Vol. 54. Issue 4. P. 472–481.

18. Bermant A.F., Aramanovich I.G. A short course of mathematical analysis: Textbook for universities. St. Petersburg: Publishing House «Lan», 2005. 736 p. [In Russ.].

19. Stepanov V.V. Course of differential equations. M.: Fizmatgiz, 1959. 468 p. [In Russ.].

20. Pontryagin L.S. Ordinary differential equations. M.: Nauka, 1974. 331 p. [In Russ.].

21. Samarsky A.A., Gulin A.V. Numerical methods. M.: Nauka, 1989. 432 p. [In Russ.].

22. Manzon B.M. Maple V. Power Edition. M.: Information and publishing house «Filin», 1998. 240 p. [In Russ.].