

DOI: 10.25558/VOSTNII.2023.40.18.005

УДК 622.272:516.02

© С.В. Черданцев, П.А. Шлапаков, С.И. Голоскоков,  
А.Ю. Ерастов, К.С. Лебедев, Е.А. Шлапаков, 2023



**С.В. ЧЕРДАНЦЕВ**

д-р техн. наук,  
ведущий научный сотрудник  
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово  
e-mail: svch01@yandex.ru



**А.Ю. ЕРАСТОВ**

старший научный сотрудник  
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово  
e-mail: erastov\_a\_y@mail.ru



**П.А. ШЛАПАКОВ**

канд. техн. наук,  
заведующий лабораторией  
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово  
e-mail: shlapak1978@mail.ru



**К.С. ЛЕБЕДЕВ**

научный сотрудник  
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово  
e-mail: lebedevks1987@yandex.ru



**С.И. ГОЛОСКОКОВ**

канд. техн. наук,  
заведующий лабораторией  
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово  
e-mail: s.goloskokov@nc-vostnii.ru



**Е.А. ШЛАПАКОВ**

научный сотрудник  
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово  
e-mail: lairxx@yandex.ru

## О ФОРМИРОВАНИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ШАХТНОЙ ПЕРЕМЫЧКЕ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ НЕЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Непрерывными атрибутами рудничной атмосферы на угольных шахтах являются метан, выделяющийся из разрушенного угля, и угольная пыль, которые, смешиваясь с вентиляционными потоками горных выработок, образуют пылегазовоздушные смеси, предрасположенные при определенных условиях к детонационным процессам, образующих ударные волны в рудничной атмосфере. Для предотвращения их распространения по сети горных выработок используют шахтные перемычки. К настоящему времени разработан ряд конструкций перемычек и предложены технологические схемы их возведения. Однако пока не созданы научно обоснованные и надежные методики расчета перемычек. В данной статье предпринята попытка построения пространственной модели перемычки на базе волновой теории. В частности, сформулирована осесимметричная краевая задача с начальными условиями, в ходе решения которой найдены фазовая скорость, частота ударной волны и компоненты напряжений в бетонной перемычке. Выявлены некоторые закономерности распределения напряжений в поперечных сечениях перемычки и вдоль ее длины.

Ключевые слова: ГОРНЫЕ ВЫРАБОТКИ, УДАРНЫЕ ВОЛНЫ, ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ, ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ, УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ, ЧАСТОТНОЕ УРАВНЕНИЕ, КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ.

### ВВЕДЕНИЕ

Разработка угольных месторождений подземным способом, как правило, сопровождается внезапными выбросами угля и газа [1–4], образованием очагов самонагревания угля [5], приводящих к возникновению дефлаграционных [6] и детонационных процессов [7, 8], обуславливающих в свою очередь возникновение

ударных волн в рудничной атмосфере [9–11].

Для предотвращения указанных негативных явлений на угольных предприятиях предусматривают перемычки, среди которых наибольшее применение получили безврубные монолитные бетонные перемычки (рис. 1), для возведения которых разработан ряд технологических схем [12].

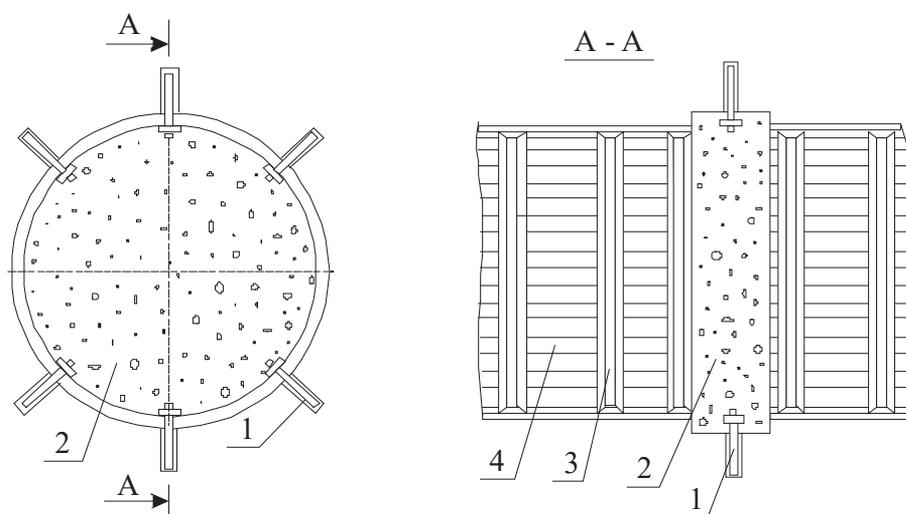


Рис. 1. Схема бетонной шахтной перемычки в горной выработке: 1 — анкерные болты, 2 — перемычка, 3 — металлическая крепь из спецпрофиля, 4 — затяжки

К настоящему времени конструктивные параметры перемычек назначаются на основе расчетов, базирующихся на расчетной схеме тонкой пластины [13]. На наш взгляд, такой подход является ошибочным. Во-первых, пластина считается тонкой, если её толщина меньше других размеров не менее, чем в 5 раз, в то время, как толщина перемычки должна быть не менее 2 м, что сопоставимо с размерами ее поперечного сечения. Следовательно, шахтная перемычка как строительный объект представляет собой не тонкую пластину, а трехмерное тело, и, следовательно, использовать для ее прочностных расчетов модель тонкой пластины, на наш взгляд, не вполне уместно.

Во-вторых, в процессе эксплуатации шахтные перемычки могут находиться под воздействием не только статических нагрузок, но также и динамических, обусловленных воздействием на перемычки ударных волн, возникающих в рудничной атмосфере.

При прохождении ударных волн в твердых деформируемых телах могут возникать напряжения, в несколько раз превышающие статические напряжения [14, 15]. В силу сказанного, расчет шахтных перемычек, на наш взгляд, требует нового подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния перемычек, основанного на ударно-волновом характере их нагружения.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УДАРНО-ВОЛНОВОМ ПРОЦЕССЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЫЧКЕ

Рассмотрим шахтную перемычку цилиндрической формы круглого поперечного сечения, радиуса  $R$ , изготовленной из монолитного бетона.

Предположим, что в рудничной атмосфере образовалась ударная волна, вызванная, например, детонационным процессом в пылегазовоздушной смеси. На пути волны в выработке установлена перемычка (рис. 2). Необходимо определить компоненты тензора напряжений в шахтной перемычке, если давление  $p_y$  на фронте ударной волны нам известно.

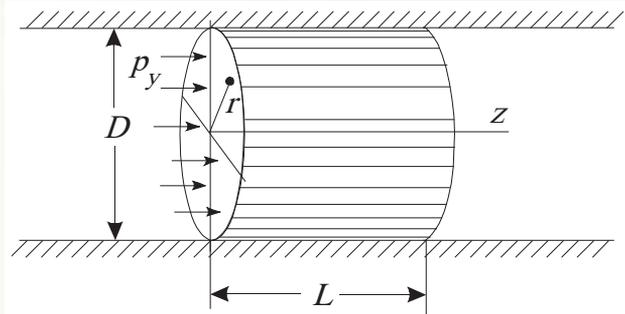


Рис. 2. Расчетная схема шахтной перемычки

Решение задачи построим в рамках следующих допущений:

1) поскольку перемычка изготовлена из монолитного бетона, являющегося упругим материалом, то между напряжениями и деформациями в перемычке справедлив закон Гука;

2) будем полагать, что компоненты деформации и углов поворота являются малыми величинами, в силу чего имеет место их линейная связь с компонентами перемещений;

3) будем полагать фронт ударной волны плоским, в связи с чем на каждую точку торцевого поперечного сечения будет действовать одинаковое давление и поэтому напряженно-деформированное состояние в перемычке будет симметричным относительно ее оси.

В связи с тем, что шахтная перемычка является круговым цилиндром, то компоненты напряженно-деформированного состояния удобно представить в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$  (рис. 2), а их единичные векторы  $e_r, e_\theta, e_z$  образуют правосторонний базис векторов.

Поскольку перемычка является деформируемым телом, то при ее соприкосновении с ударной волной сначала придут в движение точки, непосредственно воспринимающие давление  $p_y$  на фронте ударной волны. Это движение сопровождается возникновением деформаций в местах приложения давления  $p_y$ . В результате там возникнут упругие силы, которые приведут в движение следующий слой точек перемычки, который в свою очередь через посредство упругих сил передаст движение на точки, находящиеся за ним, и

так далее, пока в движение не придут все точки перемычки.

Из сказанного вытекает, что при соприкосновении ударного фронта с перемычкой в ней формируется возмущение в виде некоторого вектора перемещения  $\mathbf{u}$ , представляющего собой волну, распространяющуюся вдоль перемычки. Будем полагать волну нестационарной, и поэтому ее можно описать в виде произведения двух функций [16]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} e^{iqt} \cdot e^{\mp ikz}, \quad (1.1)$$

первая из которых —  $e^{iqt}$  — описывает изменение волны во времени, а функция  $e^{\mp ikz}$  описывает распространение волны вдоль перемычки. В формуле (1.1) приняты следующие обозначения:  $\mathbf{A}$  — некоторая векторная величина, являющаяся функцией полярных координат  $r, \theta$ ;  $q$  — частота колебаний частиц, принадлежащих волне;  $k$  — волновое число;  $i$  — мнимая единица. Знак «минус» в (1.1) соответствует распространению волны в положительном направлении оси  $z$ , а знак «плюс» — в противоположном.

В дальнейшем формулу (1.1) удобнее переписать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} e^{i(qt-kz)}, \quad (1.2)$$

учтя в ней знак «минус», при этом величина

$$\mathfrak{S} = qt - kz \quad (1.3)$$

представляет собой фазу колебания частиц, находящихся в волне.

Отметим, что частота колебаний  $q$  и волновое число  $k$  связаны с периодом колебаний  $T$  и длиной волны  $\Lambda$  следующими формулами [16]:

$$T = \frac{2\pi}{q}, \quad \Lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (1.4)$$

Разложим вектор  $\mathbf{u}$ , характеризующий волну и векторную функцию  $\mathbf{A}$  по базису единичных векторов:

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{A} = U \mathbf{e}_r + V \mathbf{e}_\theta + W \mathbf{e}_z, \quad (1.5)$$

где  $u_r, u_\theta, u_z$  — компоненты вектора перемещения, а  $U, V$  и  $W$  — скалярные функции цилиндрических координат  $r$  и  $\theta$ , которые связаны между собой посредством формул (1.2) и (1.5) следующими соотношениями

$$\begin{aligned} u_r &= U e^{i(qt-kz)}, \quad u_\theta = V e^{i(qt-kz)}, \\ u_z &= W e^{i(qt-kz)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Если фаза колебаний  $\mathfrak{S} = \text{const}$ , то, продифференцировав по времени

$$\frac{\partial(qt - kz)}{\partial t} = 0 \quad (1.7)$$

и учитывая, что  $\partial z / \partial t$  является фазовой скоростью  $v_{ph}$  волны, из формулы находим:

$$v_{ph} = q / k, \quad (1.8)$$

которая характеризует скорость перемещения волны.

### ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ УДАРНО-ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЫЧКЕ

Под действием ударной волны произвольный бесконечно малый элемент  $ds$  перемычки переместится в положение  $ds_1$ , которое можно определить посредством некоторого линейного преобразования:

$$ds_1 = \mathbf{T} ds, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{T}$  — представляет собой матрицу преобразования [17].

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & 1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

которую разложим на единичную  $\mathbf{E}$ , симметричную  $\mathbf{T}_\varepsilon$  и антисимметричную  $\mathbf{T}_\omega$  матрицы

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} + \mathbf{T}_\varepsilon + \mathbf{T}_\omega, \quad (2.3)$$

имеющие вид

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_\theta \\ \omega_z & 0 & -\omega_r \\ -\omega_\theta & \omega_r & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

При этом матрица  $\mathbf{T}_\varepsilon$  является тензором деформации, а  $\mathbf{T}_\omega$  — тензором углов поворота.

Из сопоставления формул (2.2) – (2.4) вытекают следующие соотношения между компонентами вектора перемещения с одной стороны и компонентами тензоров деформации и углов поворота:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right),$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (2.5)$$

$$\omega_r = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \quad \omega_\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right),$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \quad (2.6)$$

Исключив из выражений (2.5), (2.6) компоненты перемещения и их производные, найдем:

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varepsilon_{\theta r}}{\partial z} - \frac{\varepsilon_{\theta z}}{r},$$

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} = \frac{\partial \varepsilon_{\theta z}}{\partial \theta} - r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z} + \varepsilon_{rz} + \omega_\theta,$$

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} = r \frac{\partial \varepsilon_{\theta r}}{\partial z} - r \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial r} - \omega_r, \quad \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \theta} + 2 \frac{\varepsilon_{r\theta}}{r},$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} = r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_{\theta r}}{\partial \theta} + \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr},$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_{\theta z}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon_{\theta z}}{r}. \quad (2.7)$$

Поскольку волна в перемычке нестационарная, то принадлежащие ей частицы также будут двигаться нестационарно, что обуславливает появление сил инерции  $\rho \ddot{u}_r$ ,  $\rho \ddot{u}_\theta$ ,  $\rho \ddot{u}_z$  (точками обозначены производные по времени). Добавляя силы инерции в уравнения равновесия бесконечно малого элемента перемычки, получим уравнения, описывающие движение данного элемента перемычки [17]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} - \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} - \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0,$$

где  $\rho$  — плотность материала перемычки, а компоненты касательного напряжения подчиняются закону парности  $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$ ,  $\sigma_{rz} = \sigma_{zr}$ ,  $\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta}$ .

В силу первого допущения о справедливости закона Гука в перемычке имеют место следующие соотношения [17]:

$$\sigma_{rr} = \lambda \Theta + 2G\varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \Theta + 2G\varepsilon_{\theta\theta},$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \Theta + 2G\varepsilon_{zz},$$

$$\sigma_{r\theta} = 2G\varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{rz} = 2G\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\theta z} = 2G\varepsilon_{\theta z}, \quad (2.9)$$

где  $\Theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}$  — объемная деформация, а  $\lambda$ ,  $G$  — параметры Ламе:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (2.10)$$

Подставив формулы (2.9) в уравнения (2.8) и учитывая формулы, после преобразований придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{2G}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} + 2G \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= (\lambda + 2G) \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + 2G \frac{\partial \omega_z}{\partial r} - 2G \frac{\partial \omega_r}{\partial z}, \quad (2.11) \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - 2G \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} - 2G \frac{\omega_\theta}{r} + \frac{2G}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

В соответствии с третьим пунктом принятых допущений напряженно-деформированное состояние в перемычке является симметричным относительно ее оси, в связи с чем искомые величины не зависят от угловой координаты  $\theta$ .

Следовательно, каждая частица перемычки будет колебаться в плоскости  $rz$ , и поэтому перемещение  $u_\theta$ , углы поворота  $\omega_r$ ,  $\omega_z$  и компоненты деформации  $\varepsilon_{r\theta}$ ,  $\varepsilon_{\theta z}$  равны нулю, в силу чего система уравнений преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial \Theta}{\partial r} + 2G \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{2G}{r} \frac{\partial (r\omega_\theta)}{\partial r}, \quad (2.12) \end{aligned}$$

где объемную деформацию  $\Theta$  следует определять по формуле:

$$\Theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (2.13)$$

Для системы дифференциальных уравнений (2.12) сформулируем следующую краевую задачу с начальными условиями, исходя из следующих рассуждений.

Поскольку в начальный момент времени

$t = 0$  давление ударной волны  $p_y$  должно быть уравновешено нормальными напряжениями в торцевом сечении перемычки ( $z = 0$ ), то имеют место два равенства:

$$\sigma_{zz}|_{t=0, z=0} = p_y, \quad u_z|_{t=0, z=0} = 0, \quad (2.14)$$

представляющие собой начальные условия, которые выполняются при любом значении координаты  $r \in [0; R]$ .

Так как бетонная перемычка жестко закреплена в выработке (рис. 2), очевидно, что перемещения точек боковой поверхности перемычки отсутствуют в любой момент времени. Поэтому мы можем написать еще два равенства:

$$u_r|_{r=R} = 0, \quad u_z|_{r=R} = 0, \quad z \in [0; L], \quad (2.15)$$

называемые граничными условиями.

Система уравнений (2.12) в совокупности с начальными (2.14) и граничными (2.15) условиями образует краевую задачу с начальными условиями о взаимодействии цилиндрической перемычки с ударной волной.

### ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УДАРНО-ВОЛНОВОМ ПРОЦЕССЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЫЧКЕ

Процедуру построения начнем с отыскания производных в уравнениях (2.12), для чего воспользуемся формулами (1.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} &= \frac{\partial [U e^{i(qt-kz)}]}{\partial t} = \\ &= U e^{i(qt-kz)} \frac{\partial [i(qt-kz)]}{\partial t} = u_r \cdot i \cdot q, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) = -q^2 u_r,$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial [U e^{i(qt-kz)}]}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r} e^{i(qt-kz)},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = u_z \cdot i \cdot q,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial z} &= \frac{\partial [U e^{i(qt-kz)}]}{\partial z} = \\ &= U e^{i(qt-kz)} \frac{\partial [i(qt-kz)]}{\partial z} = -u_r \cdot i \cdot k, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= -q^2 u_z, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = -u_z \cdot i \cdot k, \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{\partial [W e^{i(qt-kz)}]}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial r} e^{i(qt-kz)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Подставляя соотношения (3.1) во вторую формулу (2.6), определяем угол поворота  $\omega_\theta$  и его производную:

$$\begin{aligned} \omega_\theta &= -\frac{1}{2} \left[ u_r \cdot i \cdot k + \frac{\partial W}{\partial r} e^{i(qt-kz)} \right], \\ \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \left[ u_r \cdot i \cdot k + \frac{\partial W}{\partial r} e^{i(qt-kz)} \right] \right\} = \\ &= -i \cdot k \cdot \omega_\theta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

С учетом формул (3.1), (3.2) приведем уравнения к следующей системе:

$$-\rho \cdot q^2 u_r = (\lambda + 2G) \frac{\partial \Theta}{\partial r} + 2G \cdot (-i \cdot k \cdot \omega_\theta), \quad (3.3)$$

$$-\rho \cdot q^2 u_z = (\lambda + 2G) \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{2G}{r} \cdot \frac{\partial (r \omega_\theta)}{\partial r}. \quad (3.4)$$

Поскольку объемная деформация определяется по формуле (2.13), то производная  $\partial \Theta / \partial z$  с учетом формул (3.1) представляется в виде:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = -i \cdot k \cdot \Theta,$$

в силу чего уравнение (3.4) упрощается:

$$-\rho \cdot q^2 u_z = (\lambda + 2G) (-i \cdot k \cdot \Theta) - \frac{2G}{r} \frac{\partial (r \omega_\theta)}{\partial r},$$

а после дифференцирования по  $z$  приобретает вид:

$$-\rho \cdot q^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} = -(\lambda + 2G) k^2 \Theta + i \cdot k \cdot \frac{2G}{r} \frac{\partial (r \omega_\theta)}{\partial r}. \quad (3.5)$$

Далее преобразуем уравнение (3.3), для чего умножим его на  $r$  и продифференцируем по  $r$ , а полученное уравнение разделим на  $r$  и после преобразования придем к уравнению:

$$\begin{aligned} -\rho \cdot q^2 \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot u_r)}{\partial r} &= (\lambda + 2G) \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \\ &+ (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} - 2G \cdot i \cdot k \frac{1}{r} \frac{\partial r \omega_\theta}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Сложив уравнения (3.5) и (3.6) и выполнив преобразования, придем к уравнению:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \alpha^2 \Theta = 0, \quad (3.7)$$

в котором

$$\alpha^2 = \frac{\rho \cdot q^2}{\lambda + 2G} - k^2. \quad (3.8)$$

Еще одно уравнение получим, продифференцировав (3.3) по  $z$ , а (3.4) по  $r$

$$\begin{aligned} -\rho \cdot q^2 \frac{\partial u_r}{\partial z} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \\ &+ 2G \cdot (-i \cdot k) \cdot \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\rho \cdot q^2 \frac{\partial u_z}{\partial r} &= (\lambda + 2G) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) - \\ &- 2G \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \omega_\theta)}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

и вычитая из первого полученного уравнения второе. После выполнения ряда преобразований с использованием формул (2.5), (2.6)

и (3.2), получим уравнение относительно угла  $\omega_\theta$ :

$$\frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} - \frac{\omega_\theta}{r^2} + \beta^2 \omega_\theta = 0, \quad (3.9)$$

где

$$\beta^2 = \frac{\rho \cdot q^2}{G} - k^2. \quad (3.10)$$

Если в уравнении (3.7) перейти к переменной  $\zeta$ , а в уравнении (3.9) к переменной  $\eta$ , связанных с координатой  $r$  соотношениями

$$\zeta = \alpha \cdot r, \quad \eta = \beta \cdot r, \quad (3.11)$$

то уравнения (3.7) и (3.9) приводятся соответственно к уравнениям

$$\frac{\partial^2 \Theta(\zeta)}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \Theta(\zeta)}{\partial \zeta} + \Theta(\zeta) = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 \omega_\theta(\eta)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \omega_\theta(\eta)}{\partial \eta} + \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \omega_\theta(\eta) = 0,$$

являющимся уравнениями Бесселя. При этом первое из уравнений имеет индекс  $\nu = 0$ , а второе — индекс  $\nu = 1$ .

Решения уравнений (3.12) выражаются через функции Бесселя следующим образом [18]:

$$\begin{aligned} \Theta(\zeta) &= A_1 J_0(\zeta) + A_2 Y_0(\zeta), \\ \omega_\theta(\eta) &= B_1 J_1(\eta) + B_2 Y_1(\eta), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $J_0(\zeta)$ ,  $Y_0(\zeta)$  — функции Бесселя нулевого порядка соответственно первого и второго рода,  $J_1(\eta)$ ,  $Y_1(\eta)$  — функции Бесселя первого порядка соответственно первого и второго рода,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  — произвольные постоянные.

Из формул (3.11) видно, что при  $r \rightarrow 0$  переменные  $\zeta$  и  $\eta$  также стремятся к нулю и поэтому функции Бесселя  $Y_0(\zeta)|_{\zeta \rightarrow 0} \rightarrow -\infty$ ,

$Y_1(\eta)|_{\eta \rightarrow 0} \rightarrow -\infty$ , в силу чего искомые функции  $\Theta_k(\zeta)$  и  $\omega_\theta(\eta)$  в точке  $r = 0$  не определены. Чтобы исключить эту неопределенность, положим постоянные интегрирования  $A_2 = 0$ ,  $B_2 = 0$ , в связи с чем формулы (3.13) существенно упрощаются и приобретают вид:

$$\Theta(\zeta) = A_1 J_0(\zeta), \quad \omega_\theta(\eta) = B_1 J_1(\eta). \quad (3.14)$$

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ И ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПЕРЕМЫЧКЕ

Подставив соотношения (1.6) в формулы (2.13), (3.2) и выполнив преобразования, получим соотношения:

$$\begin{aligned} \Theta &= \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} U - i \cdot k \cdot W \right) e^{i(qt - kz)}, \\ \omega_\theta &= \frac{1}{2} \left( -U \cdot i \cdot k - \frac{\partial W}{\partial r} \right) e^{i(qt - kz)}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

сопоставляя с которыми формулы (3.14), придем к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} U - i \cdot k \cdot W &= A_1 J_0(\zeta), \\ -U \cdot i \cdot k - \frac{\partial W}{\partial r} &= 2B_1 J_1(\eta), \end{aligned}$$

откуда выразим искомые функции  $U$ ,  $W$  через функции Бесселя в явном виде:

$$\begin{aligned} U &= C_1 \frac{\partial [J_0(\zeta)]}{\partial r} + C_2 \cdot k \cdot J_1(\eta), \\ W &= C_1 \cdot i \cdot k \cdot J_0(\zeta) + \frac{C_2 \cdot i}{r} \cdot \frac{\partial [r J_1(\eta)]}{\partial r}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы.

Учитывая правила дифференцирования функций Бесселя [18], найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [J_0(\zeta)]}{\partial r} &= -\alpha J_1(\zeta), \\ \frac{\partial [r J_1(\eta)]}{\partial r} &= \eta J_0(\eta), \end{aligned}$$

с учетом которых приведем выражения (4.2) к виду:

$$U = -C_1 J_1(\zeta) \cdot \alpha + C_2 \cdot k \cdot J_1(\eta),$$

$$W = C_1 \cdot i \cdot k \cdot J_0(\zeta) + \frac{C_2 \cdot i}{r} \cdot \eta \cdot J_0(\eta). \quad (4.3)$$

В силу формул (1.6), граничные условия (2.15) сначала преобразуем к виду:

$$U|_{r=R} = 0, \quad W|_{r=R} = 0,$$

а затем, подставив сюда выражения (4.2) с учетом формул (3.11), получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -C_1 \cdot \alpha \cdot J_1(\alpha R) + C_2 \cdot k \cdot J_1(\beta R) = 0, \\ C_1 \cdot k \cdot J_0(\alpha R) + C_2 \cdot \beta \cdot J_0(\beta R) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Из теоремы Кронекера–Капелли [19] следует, что система (4.4) имеет нетривиальные решения только в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов при постоянных  $C_1, C_2$ , равен нулю:

$$\begin{vmatrix} -\alpha \cdot J_1(\alpha R) & k \cdot J_1(\beta R) \\ k \cdot J_0(\alpha R) & \beta \cdot J_0(\beta R) \end{vmatrix} = 0,$$

откуда вытекает трансцендентное уравнение:

$$J_1(\alpha R) \cdot J_0(\beta R) \cdot \alpha \cdot \beta + J_0(\alpha R) \cdot J_1(\beta R) \cdot k^2 = 0,$$

которое, в силу формул (1.8), (3.8) и (3.10), преобразуется к виду:

$$J_1(\alpha R) \cdot J_0(\beta R) \cdot \sqrt{\left(\frac{\rho}{\lambda + 2G} \cdot v_{ph}^2 - 1\right) \left(\frac{\rho}{G} \cdot v_{ph}^2 - 1\right)} + J_0(\alpha R) \cdot J_1(\beta R) = 0. \quad (4.5)$$

Поскольку малые звуковые возмущения в сплошной среде распространяются в продольном направлении со скоростью  $v_p$ , а в поперечном со скоростью  $v_s$ :

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}},$$

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\mu)}},$$

$$v_s = v_p \sqrt{\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}}, \quad (4.6)$$

то аргументы  $\alpha R, \beta R$  приведем к более удобному для вычислительных процедур виду:

$$\alpha R = \frac{2\pi}{\chi \cdot \delta} \sqrt{\bar{v}_{ph}^2 - 1},$$

$$\beta R = \frac{2\pi}{\chi \cdot \delta} \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{(1-2\mu)} \cdot \bar{v}_{ph}^2 - 1}, \quad (4.7)$$

где параметры  $\bar{v}_{ph}, \chi$  и  $\delta$  определяются по формулам:

$$\bar{v}_{ph} = v_{ph} / v_p, \quad \delta = L / R, \quad \chi = \Lambda / L. \quad (4.8)$$

В силу сказанного, уравнение (4.5) приводится к виду

$$J_1(\alpha R) \cdot J_0(\beta R) \cdot \sqrt{(\bar{v}_{ph}^2 - 1) \left(\frac{2(1-\mu)}{(1-2\mu)} \cdot \bar{v}_{ph}^2 - 1\right)} + J_0(\alpha R) \cdot J_1(\beta R) = 0 \quad (4.9)$$

и представляет собой частотное уравнение, поскольку в качестве искомой величины содержит фазовую скорость волны, которая, согласно формуле (1.8), содержит частоту волны  $q$ .

Так как частотное уравнение (4.9) является трансцендентным, то его корни можно определить только численно. В статье для этой цели использовался программный пакет MathCAD [20]. После определения корней уравнения по первой из формул вычислены значения фазовых скоростей ударной волны, а по формуле (1.8) — частота волны. Данные вычислений приведены в табл. 1.

Необходимые вычислительные процедуры выполнены при следующих исходных данных: коэффициент Пуассона и модуль Юнга бетона соответственно  $\mu = 0,2$ ;  $E = 2,75 \cdot 10^{10}$  Па; плотность бетона  $\rho = 2,2 \cdot 10^3$  г/м<sup>3</sup>, параметры  $\delta$ ,  $\chi$  приняты

равными  $\delta = 2$ ;  $\chi = 0,5$ . Тогда согласно первой формуле (4.6) скорость распространения звукового возмущения в продольном направлении составит  $v_p = 3,73 \cdot 10^3$  м/с.

Таблица 1

Значения фазовой скорости и частоты ударной волны в перемычке

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{v}_{ph(i)}$	1,063	1,168	1,312	1,476	1,605	1,831	1,933	2,153
$v_{ph(i)} \cdot 10^{-3}$ , м/с	3,961	4,354	4,889	5,5	5,981	6,824	7,202	8,025
$q_i \cdot 10^{-4}$ , с <sup>-1</sup>	1,991	2,189	2,458	2,765	3,006	3,43	3,62	4,034

Далее по формулам (3.8) и (3.10) определяем параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  и приступаем к определению напряжений в цилиндрической перемычке.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЫЧКЕ, ОБУСЛОВЛЕННОГО ПРОХОЖДЕНИЕМ ЧЕРЕЗ НЕЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Для этой цели воспользуемся формулами (2.9), в которых учтем формулы (2.5), (2.13), (3.1), (1.6). В результате придем к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} &= (\nu \cdot \Omega + 2\Psi_r) e^{i(qt-kz)}, \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta} &= (\nu \cdot \Omega + 2\Psi_\theta) e^{i(qt-kz)}, \\ \bar{\sigma}_{zz} &= (\nu \cdot \Omega + 2\Psi_z) e^{i(qt-kz)}, \\ \frac{\bar{\sigma}_{rz}}{G} &= 2 \cdot \Psi_{rz} e^{i(qt-kz)}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} &= \sigma_{rr} / G, \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} / G, \\ \bar{\sigma}_{zz} &= \sigma_{zz} / G, \quad \bar{\sigma}_{rz} = \sigma_{rz} / G, \quad \nu = \lambda / G, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} U - i \cdot k \cdot W, \quad \Psi_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \\ \Psi_\theta &= \frac{1}{r} \cdot U, \quad \Psi_z = -i \cdot k \cdot W, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\Psi_{rz} = -U \cdot i \cdot k + \frac{\partial W}{\partial r}. \quad (5.3)$$

Подставив в первую формулу (5.3) выражения (4.3) и учитывая формулы, а также правила дифференцирования функций Бесселя [18], находим

$$\Omega = C_1(k^2 - \alpha^2) \cdot J_0(\zeta) + 2C_2 \cdot \beta \cdot k \cdot J_0(\eta) \quad (5.4)$$

и параметры  $\Psi_r, \Psi_\theta, \Psi_z$

$$\begin{aligned} \Psi_r &= -C_1 \cdot \alpha^2 \cdot \left[ J_0(\zeta) - \frac{1}{\zeta} J_1(\zeta) \right] + \\ &+ C_2 \cdot k \cdot \beta \cdot \left[ J_0(\eta) - \frac{1}{\eta} J_1(\eta) \right], \\ \Psi_\theta &= -C_1 J_1(\zeta) \cdot \frac{\alpha}{r} + C_2 \cdot \frac{k}{r} \cdot J_1(\eta), \\ \Psi_z &= C_1 \cdot k^2 \cdot J_0(\zeta) + C_2 \cdot k \cdot \beta \cdot J_0(\eta), \\ \Psi_{rz} &= [C_1 J_1(\zeta) \cdot \alpha - C_2 \cdot k \cdot J_1(\eta)] \cdot i \cdot k + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} [C_1 \cdot J_0(\zeta) \cdot k + C_2 \cdot J_0(\eta) \cdot \beta] \cdot i. \end{aligned} \quad (5.5)$$

С учетом выражений (5.5) формулы напряжений (5.1) преобразуются к виду:

$$\bar{\sigma}_{rr} = \left\{ C_1 \left[ [\nu k^2 - (\nu + 2)\alpha^2] J_0(\zeta) + \frac{\alpha}{r} J_1(\zeta) \right] + C_2 \left[ 2(\nu + 1)\beta k J_0(\eta) - \frac{2k}{r} J_1(\eta) \right] \right\} e^{i(qt - kz)}, \quad (5.6)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \left\{ C_1 \left[ \nu(k^2 - \alpha^2) J_0(\zeta) - 2\frac{\alpha}{r} J_1(\zeta) \right] + 2C_2 \left[ \nu\beta k J_0(\eta) + \frac{k}{r} J_1(\eta) \right] \right\} e^{i(qt - kz)}, \quad (5.7)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \left\{ C_1 [(\nu + 2)k^2 - \nu\alpha^2] J_0(\zeta) + 2C_2 k\beta(\nu + 1) J_0(\eta) \right\} e^{i(qt - kz)}, \quad (5.8)$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = \left\{ 2 \left[ C_1 J_1(\zeta) \alpha k - C_2 J_1(\eta) k^2 \right] \cdot i + \frac{\partial}{\partial r} \left[ C_1 J_0(\zeta) k + C_2 J_0(\eta) \beta \right] \cdot i \right\} e^{i(qt - kz)}. \quad (5.9)$$

Для определения  $C_1$  и  $C_2$  обратимся к начальным условиям (2.14), в первое из которых подставим формулу (5.8) и получим уравнение:

$$C_1 [(\nu + 2)k^2 - \nu\alpha^2] J_0(\zeta) + 2C_2 k\beta(\nu + 1) J_0(\eta) = \bar{p}_y, \quad (5.10)$$

а во второе условие (2.14) подставим третью формулу (1.6), откуда находим:

$$W = 0,$$

подставляя которое в (4.3), получаем еще одно уравнение:

$$C_1 k J_0(\zeta) + C_2 \beta J_0(\eta) = 0. \quad (5.11)$$

Уравнения (5.10) и (5.11) образуют систему уравнений относительно искоемых величин  $C_1$  и  $C_2$ , из которой вытекают равенства:

$$C_1 J_0(\zeta) = -\frac{\bar{p}_y}{\nu(\alpha^2 + k^2)},$$

$$C_2 J_0(\eta) = \frac{\bar{p}_y}{\nu(\alpha^2 + k^2)} \frac{k}{\beta}, \quad (5.12)$$

показывающие, что произведения  $C_1 \cdot J_0(\zeta)$ ,  $C_2 J_0(\eta)$  являются постоянными величинами, поскольку правые части формул постоянны.

Подставив (5.12) равенства в формулу (5.8), находим нормальное напряжение:

$$\bar{\sigma}_{zz} = \bar{p}_y \cdot e^{i(qt - kz)}, \quad (5.13)$$

зависящее от времени  $t$  и от координаты  $z$ , но не зависящее от полярной координаты  $r$ . Таким образом, как и следовало ожидать, в любой точке поперечного сечения перемычки нормальное напряжение  $\bar{\sigma}_{zz}$  одинаковое.

Поскольку  $C_1$ ,  $C_2$  по условию являются постоянными величинами, то функции  $J_0(\zeta)$ ,  $J_0(\eta)$  должны быть вычислены в какой-либо фиксированной точке поперечного сечения. В качестве таковой выберем точку  $r = 0$ . В силу формул (3.11) вычисляем значения функций:

$$J_0(\zeta)|_{\zeta=0} = 1, \quad J_0(\eta)|_{\eta=0} = 1,$$

с учетом которых равенства (5.12) преобразуются к виду:

$$C_1 = -\frac{\bar{p}_y}{\nu(\alpha^2 + k^2)}, \quad C_2 = \frac{\bar{p}_y}{\nu(\alpha^2 + k^2)} \frac{k}{\beta}. \quad (5.14)$$

Учитывая в формулах (5.6), (5.7) и (5.19) равенства (5.12) и (5.14), получаем формулы для определения относительных напряжений в шахтной перемычке:

$$\bar{\sigma}_{rr} = \left\{ \frac{\nu + 2}{\nu} \bar{p}_y - \frac{2\bar{p}_y}{\nu(\alpha^2 + k^2)} \left[ \alpha^2 \frac{J_1(\zeta)}{\zeta} + k^2 \frac{J_1(\eta)}{\eta} \right] \right\} e^{i(qt - kz)}, \quad (5.15)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \left\{ \bar{p}_y + \frac{2\bar{p}_y}{\nu(\alpha^2 + k^2)} \left[ \alpha^2 \frac{J_1(\zeta)}{\zeta} + k^2 \frac{J_1(\eta)}{\eta} \right] \right\} e^{i(qt-kz)}, \quad (5.16)$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = -\frac{2\bar{p}_y \cdot k}{\nu(\alpha^2 + k^2)} \left[ \alpha \cdot J_1(\zeta) + \frac{k^2}{\beta} J_1(\eta) \right] i \cdot e^{i(qt-kz)}, \quad (5.17)$$

зная которые, по формулам (5.2) определяем реальные напряжения  $\sigma_{rr}, \sigma_{q\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$ .

Анализируя формулы (5.15), (5.16), замечаем, что функции  $\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}$  в точке  $r = 0$  не определены, поскольку содержат выражения вида:

$$\left. \frac{J_1(\zeta)}{\zeta} \right|_{\zeta=0} = \frac{0}{0}, \quad \left. \frac{J_1(\eta)}{\eta} \right|_{\eta=0} = \frac{0}{0}.$$

Поэтому переходя в формулах (5.15), (5.16) к пределу при  $r \rightarrow 0$  и учитывая, что

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{J_1(\zeta)}{\zeta} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{J_1(\eta)}{\eta} = \frac{1}{2},$$

получаем формулы для вычисления функций  $\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}$  в точке  $r = 0$

$$\bar{\sigma}_{rr} = \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{\nu+1}{\nu} \bar{p}_y e^{i(qt-kz)}. \quad (5.18)$$

На рис. 3 показаны графики реальных напряжений в зависимости от координаты  $r$  в торцевом сечении ( $z = 0$ ) перемычки в начальный момент времени ( $t = 0$ ). Вычислительные

процедуры выполнены при фазовой скорости ударной волны  $v_{ph} = 3961$  м/с, частоте колебаний  $q = 1,991 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup> и давлении на фронте ударной волны  $p_y = 2$  МПа.

Анализ рис. 3 показывает, что в точке  $r = 0$  напряжения  $\sigma_{rr} = \sigma_{q\theta} = 5$  МПа. С ростом координаты  $r$  напряжения  $\sigma_{rr}$  растут, а  $\sigma_{q\theta}$  уменьшаются. При этом графики этих напряжений представляют собой симметричные кривые относительно пунктирной линии, поскольку, имеет место следующее условие:

$$\bar{\sigma}_{rr} + \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{2(\nu+1)}{\nu} \bar{p}_y, \quad (5.19)$$

вытекающее из формул (5.15), (5.16).

Далее, обратим внимание, что в точке  $r = 0,73$  м функция  $\sigma_{rr}(r)$  имеет глобальный максимум, равный 8,076 МПа, а функция  $\sigma_{q\theta}(r)$  имеет, соответственно, глобальный минимум 1,924 МПа. Функция  $\sigma_{rz}(r)$  знакопеременная и имеет три локальных экстремума. На интервале  $r \in [0; 0,641\text{м}]$  в точке  $r = 0,28$  м минимум  $-2,629$  МПа, на интервале  $r \in [0,641 \text{ м}; 0,835 \text{ м}]$  в точке  $r = 0,73$  м — максимум 0,279 МПа и, наконец, на интервале  $r \in [0,835 \text{ м}; 1,25 \text{ м}]$  — минимум  $-2,097$  МПа в точке  $r = 1,19$  м.

Анализ графиков на рис. 3 показывает, что наибольшими по величине являются напряжения  $\sigma_{rr}$ , максимальное значение которых составляет 8,076 МПа, что более чем в четыре раза превышает давление на фронте ударной волны. Значительными являются также нормальные напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$ . Их максимальные значения достигают 5 МПа. Касательные напряжения  $\sigma_{rz}$ , хотя существенно меньше напряжений  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ , но их наибольшее (по модулю) значение 2,629 МПа даже больше давления на фронте ударной волны.

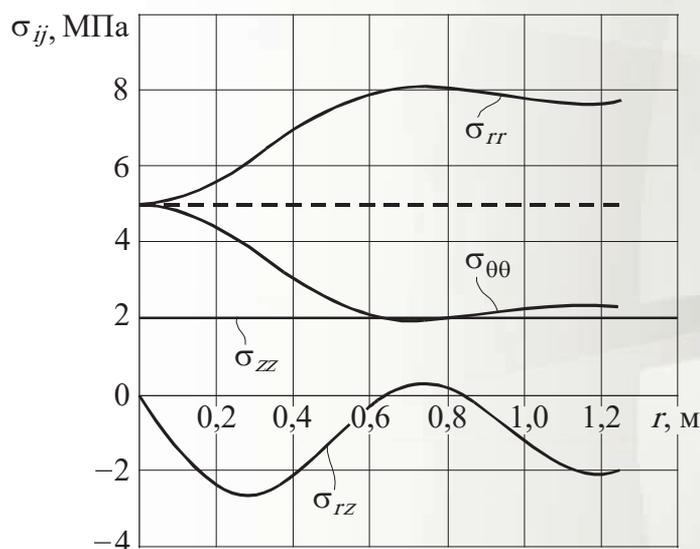


Рис. 3. Графики зависимости напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{rz}$  от полярной координаты  $r$  в торцевом сечении перемычки ( $z = 0$ ) в начальный момент времени ( $t = 0$ )

Таким образом, выполненные на базе волновой теории расчеты показали, что компоненты тензора напряжений в перемычке достигают значительных величин, превосходя в несколько раз давление на фронте ударной волны.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы сводятся к следующему:

- 1) сформулирована краевая осесимметричная задача с начальными условиями для системы двух уравнений в частных производных, описывающая ударно-волновой процесс в шахтной бетонной перемычке;
- 2) найдены решения краевой задачи, выражающиеся с помощью функций Бесселя;
- 3) получено частотное уравнение, корни которого найдены численно с помощью про-

граммы MathCAD. Это позволило вычислить фазовую скорость и найти частоту ударной волны в перемычке;

5) получены формулы для определения компонентов тензора напряжений, по которым построены их графики, анализ которых показал:

- нормальные радиальные и тангенциальные напряжения в центре тяжести поперечного сечения перемычки имеют одинаковые значения;
- с увеличением координаты, направленной вдоль радиуса, тангенциальные напряжения уменьшаются, а радиальные увеличиваются, при этом максимальное значение радиальных напряжений более чем в четыре раза превышает давление на фронте ударной волны.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Большинский М.И., Лысиков Б.А., Каплюхин А.А. Газодинамические явления в шахтах. Севастополь: Вебер, 2003. 284 с.
2. Зыков В.С. О механизме формирования выбросоопасной ситуации в очистном забое угольной шахты // Маркшейдерский вестник. 2016. № 5. С. 44–48.
3. Черданцев Н.В. Об одном подходе к расчету выброса угля из газоносного пласта, вмещающего геологические нарушения // Безопасность труда в промышленности. 2019. № 8. С. 13–18.
4. Chanyshev A.I. A method to determine a body's thermal state // Journal of Mining Science. 2012. Vol. 48. Issue 4. P. 660–668.
5. Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Шлапаков Е.А., Лебедев К.С., Ерастов А.Ю. Теплофизические и газодинамические условия протекания процессов дефлаграции и детонации в пыле-

газовоздушных потоках горных выработок вблизи очагов самонагрева // Химическая физика и мезоскопия. 2019. Т. 21. № 2. С. 179–189.

6. Cherdantsev S.V., Li Hi Un, Filatov Yu.M., Botvenko D.V., Shlapakov P.A., Kolykhalov V.V. Combustion of Fine Dispersed Dust-Gas-Air Mixtures in Underground Workings // Journal of Mining Science. 2018. Vol. 54. Issue 2. P. 339–346.

7. Kurlenya M.V., Skritsky V.A. Methane Explosions and Causes of Their Origin in Highly Productive Sections of Coal Mines // Journal of Mining Science. 2017. Vol. 53. Issue 5. P. 861–867.

8. Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Лебедев К.С., Колыхалов В.В. Формирование детонационного процесса при внезапном выбросе газа в горную выработку со сверхзвуковой скоростью // Горный информационно аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2019. № 7. С. 62–73.

9. Fomin V.M., Postinkov B.V., Kolotilov V.A., Shalaev V.S., Shalaev Y.V., Florya N.F. Modeling shock wave processes in a mine opening with permeable barriers // Journal of Mining Science. 2019. Vol. 55. Issue 1. P. 18–22.

10. Черданцев С.В., Филатов Ю.М., Шлапаков П.А. Структура и параметры ударного фронта в вязком теплопроводном газовоздушном потоке горной выработки // Горный информационно аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2019. № 10. С. 183–194.

11. Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Лебедев К.С., Колыхалов В.В. Особенности формирования ударного фронта на участках поворота горных выработок // Безопасность труда в промышленности. 2020. № 5. С. 29–35.

12. Нурғалиев Е.И. Обоснование и разработка технологии изоляции пластовых выработок безврубовыми монолитными перемычками с одновременным возведением тампонажных завес: автореф. дисс. ... канд. техн. наук // Нурғалиев Евгений Илдарович. Кемерово. 2021. 22 с.

13. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.

14. Kolsky H. Stress waves in solids. Oxford, 1953. 192 p.

15. Глушак Б.Л., Куропатенко В.Ф., Новиков С.А. Исследование прочности материалов при динамических нагрузках. Новосибирск, 1992. 295 с.

16. Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. 400 с.

17. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высшая школа, 1975. 526 с.

18. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.

19. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 280 с.

20. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. М.: НТ Пресс, 2006. 496 с.

---

**DOI: 10.25558/VOSTNII.2023.40.18.005**

**UDC 622.272:516.02**

**© S.V. Cherdantsev, P.A. Shlapakov, S.I. Goloskokov, A.Yu. Erastov, K.S. Lebedev, E.A. Shlapakov, 2023**

**S.V. CHERDANTSEV**

Doctor of Engineering Sciences,

Leading Researcher

JSC «NC VostNII», Kemerovo

e-mail: svch01@yandex.ru

**P.A. SHLAPAKOV**

Candidate of Engineering Sciences,  
Head of Laboratory  
JSC «NC VostNII», Kemerovo  
e-mail: shlapak1978@mail.ru

**S.I. GOLOSKOKOV**

Candidate of Engineering Sciences,  
Head of Laboratory  
JSC «NC VostNII», Kemerovo  
e-mail: s.goloskokov@nc-vostnii.ru

**A.Yu. ERASTOV**

Senior Research Associate  
JSC «NC VostNII», Kemerovo  
e-mail: eractov\_a\_y@mail.ru

**K.S. LEBEDEV**

Research Associate  
JSC «NC VostNII», Kemerovo  
e-mail: lebedevks1987@yandex.ru

**E.A. SHLAPAKOV**

Researcher  
JSC «NC VostNII», Kemerovo  
e-mail: lairxx@yandex.ru

**ON FORMATION OF STRESS STATE IN SHAFT BRIDGE WHEN SHOCK WAVE PASSES THROUGH IT**

*The indispensable attributes of the mine atmosphere in coal mines are methane, released from destroyed coal, and coal dust, which, mixing with the ventilation flows of mine workings, form dust and gas-air mixtures, predisposed under certain conditions to detonation processes, which form shock waves in the mine atmosphere. To prevent their spread through the network of mine workings, mine bridges are used. To date, a number of jumper structures have been developed and technological schemes for their construction have been proposed. However, scientific and reliable methods for calculating jumpers have not yet been created. This article attempts to build a spatial model of a jumper based on wave theory. In particular, an axisymmetric edge problem with initial conditions was formulated, during the solution of which the phase speed, shock wave frequency and stress components in the concrete bridge were found. Some patterns of stress distribution in the cross sections of the bridge and along its length were revealed.*

Keywords: MINING, SHOCK WAVES, PHASE VELOCITY, OSCILLATION FREQUENCY, BESSEL EQUATIONS, FREQUENCY EQUATION, VOLTAGE TENSOR COMPONENTS.

**REFERENCES**

1. Bolshinsky M.I., Lysikov B.A., Kaplyukhin A.A. Gas-dynamic phenomena in mines. Sevastopol: Weber, 2003. 284 p. [In Russ.].
2. Zykov V.S. On the mechanism of formation of an explosive situation in the treatment face of a coal mine // Surveyor's Bulletin [Markshejderskij vestnik]. 2016. No. 5. P. 44–48. [In Russ.].
3. Cherdantsev N.V. About one approach to the calculation of coal emissions from a gas-bearing reservoir containing geological disturbances // Industrial Safety [Bezopasnost truda v

promyshlennosti]. 2019. No. 8. P. 13–18. [In Russ.].

4. Chanyshev A.I. A method to determine a body's thermal state // Journal of Mining Science. 2012. Vol. 48. Issue 4. P. 660–668.

5. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Shlapakov E.A., Lebedev K.S., Erastov A.Yu. Thermophysical and gas-dynamic conditions of deflagration and detonation processes in dust-gas-air flows of mine workings near the foci of self-heating // Chemical physics and mesoscopy [Himicheskaya fizika i mezoskopiya]. 2019. Vol. 21. No. 2. P. 179–189. [In Russ.].

6. Cherdantsev S.V., Li Hi Un, Filatov Yu.M., Botvenko D.V., Shlapakov P.A., Kolykhalov V.V. Combustion of Fine Dispersed Dust-Gas-Air Mixtures in Underground Workings // Journal of Mining Science. 2018. Vol. 54. Issue 2. P. 339–346.

7. Kurlenya M.V., Skritsky V.A. Methane Explosions and Causes of Their Origin in Highly Productive Sections of Coal Mines // Journal of Mining Science. 2017. Vol. 53. Issue 5. P. 861–867.

8. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Lebedev K.S., Kolykhalov V.V. Formation of a detonation process with a sudden release of gas into a mine at supersonic speed // Mining information analytical Bulletin (scientific and technical journal) [Gornyj informacionno analiticheskij byulleten (nauchno-tekhnicheskij zhurnal)]. 2019. No. 7. P. 62–73. [In Russ.].

9. Fomin V.M., Postinkov B.V., Kolotilov V.A., Shalaev V.S., Shalaev Y.V., Florya N.F. Modeling shock wave processes in a mine opening with permeable barriers // Journal of Mining Science. 2019. Vol. 55. Issue 1. P. 18–22.

10. Cherdantsev S.V., Filatov Yu.M., Shlapakov P.A. Structure and parameters of the shock front in a viscous heat-conducting gas-air flow of mining // Mining information analytical bulletin (scientific and technical journal) [Gornyj informacionno analiticheskij byulleten (nauchno-tekhnicheskij zhurnal)]. 2019. No. 10. P. 183–194. [In Russ.].

11. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Lebedev K.S., Kolykhalov V.V. Features of the formation of the shock front at the sites of turning of mining workings // Industrial Safety [Bezopasnost truda v promyshlennosti]. 2020. No. 5. P. 29–35. [In Russ.].

12. Nurgaliev E.I. Substantiation and development of technology for isolation of reservoir workings by pipe-less monolithic lintels with simultaneous construction of grouting curtains: abstract. diss. ... Candidate of Technical Sciences // Nurgaliev Evgeny Ildarovich. Kemerovo. 2021. 22 p. [In Russ.].

13. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. Plates and shells. M.: Nauka, 1966. 636 p. [In Russ.].

14. Kolsky H. Stress waves in solids. Oxford, 1953. 192 p.

15. Glushak B.L., Kuropatenko V.F., Novikov S.A. Study of the strength of materials under dynamic loads. Novosibirsk, 1992. 295 p. [In Russ.].

16. Ostrovsky L.A., Potapov A.I. Introduction to the theory of modulated waves. Moscow: Fizmatlit, 2003. 400 p. [In Russ.].

17. Koltunov M.A., Vasiliev Yu.N., Chernykh V.A. Elasticity and strength of cylindrical bodies. M.: Higher School, 1975. 526 p. [In Russ.].

18. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Partial differential equations of mathematical physics. Moscow: Higher School, 1970. 712 p. [In Russ.].

19. Ilyin V.A., Poznyak E.G. Linear algebra. M.: FIZMATLIT, 2005. 280 p. [In Russ.].

20. Alekseev E.R., Chesnokova O.V. Solving computational mathematics problems in Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. Moscow: NT Press, 2006. 496 p. [In Russ.].