DOI: 10.25558/VOSTNII.2025.56.69.004
УДК 624.131+ 539.215

Р. З. КАМАЛЯН
д-р техн. наук, проф.,
профессор кафедры
Российский университет кооперации,
г. Краснодар
e-mail: kasarub@gmail.com

С. Р. КАМАЛЯН
канд. физ.мат. наук
зав. отделом Южного межрегионального управление охраны ПАО «Газпром»,
г. Краснодар
e-mail: kasarub@gmail.com

Н. С. НЕСТЕРОВА
канд. техн. наук
доцент кафедры
ИМСИТ, г. Краснодар
e-mail: nnnnnnn46@mail.ru

О МОДЕЛЬНОМ ИССЛЕДОВАНИИ ДВИЖЕНИЙ ГРУНТА ПРИ СИЛЬНОМ ДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Математические модели получили широкое распространение для исследования эффектов подземного взрыва примерно с середины прошлого века.

Среди множества моделей наиболее полное описание процессов, сопровождающих подземный взрыв, представлено в модели Григоряна.

В работе дан анализ этой модели и рассмотрена возможность её исследования методом характеристик.

Ключевые слова: МОДЕЛЬ, ПЛОТНОСТЬ, ДЕФОРМАЦИЯ, НАПРЯЖЕНИЕ, ХАРАКТЕРИСТИКИ.

Согласно модели Григоряна [1], если элемент среды испытывает необратимые изменения объёма, то давление при этом связано с плотностью среды соотношением.

$$P = f_1(\rho). \qquad (1)$$

Необратимые изменения плотности (объема) имеют место только в процессе нагрузки. В этой связи соотношение (1) справедливо при условии

$$\frac{dP}{dt} > 0.$$

При выполнении определённых условий [1], для процесса разгрузки соотношение (1) будет иметь вид

$$P = f_2(\rho_1 P_*) \qquad (2)$$

В (2) P_* максимальное давление (рис. 1), до которого загружен рассматриваемый элемент среды в процессе предыдущего необратимого изменения его объема. С учетом (1) можно вместо P_* ввести значение плотности ρ_*, соответствующее P_*

$$P_* = f_1(\rho_*) \qquad (3)$$

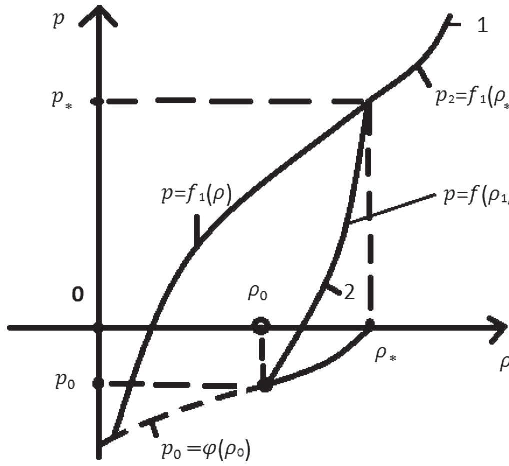

Рис. 1. Характер нагрузки и разгрузки элементов среды в модели Григоряна

Значения P_* и ρ_* можно трактовать как параметры, характеризующие остаточную (необратимую) объемную деформацию. При этом, согласно [1], функции f_1 и f_2 имеют качественный вид, представленный на рис. 1.

В процессе разгрузки, начинающейся в точке (P_* ρ_*), происходит необратимое изменение объема. Точка, описывающая этот процесс, перемещается по кривой 2. Эта точка может достигнуть положения (P_0 , ρ_0), отвечающее такому состоянию рассматриваемого элемента, в котором он не сможет выдержать большего всестороннего растягивающего напряжения. Множество таких состояний образуют кривую

$$P_0 = \varphi\,(\rho_0)\,. \tag{4}$$

Соотношения (1) — (4) можно записать в виде

$$P = f\,(\rho_1\,,\rho_*)\,\mathrm{H}\,(\rho - \rho_0)\;\mathrm{H}\;(\rho_* - \rho),$$

$$P_* = f\,(\rho_0\,,\rho_*) = f_1\,(\rho_*), \tag{5}$$

$$P_0 = f\,(\,\rho_0\,,\rho_*) = \varphi\,(\rho_0\,).$$

Условие того, что необратимая объемная деформация происходит только с возрастанием ρ_* имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}\rho_*}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\rho}{dt}\,\mathrm{H}(\rho - \rho_*)\;\mathrm{H}\;(\tfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}}), \tag{6}$$

где H — функции Хевисайда.

В качестве условия пластичности взята зависимость второго инварианта девиатора напряжений от P.

$$J_2 = \frac{1}{2}\,S_{ij}\;\;S_{ij} = \mathrm{F}(P)\,, \tag{7}$$

где $S_{ij} = \sigma_{ij} + P\delta_{ij}$

В (7) F — неубывающая функция своего аргумента. Соотношение (7) представляет собой условие типа условия Мизеса-Шлейхера [1].

Для определения упругой составляющей деформации сдвига используется понятие производной Яумана по времени от девиатора напряжений. В результате получим

$$2\mu\left(d_{ij} - \frac{1}{3}d_{kk}\delta_{ij}\right) = \frac{\bar{d}S_{ij}}{dt} + \lambda S_{ij}\,, \tag{8}$$

где $\frac{\bar{d}S_{ij}}{dt}$ — производная Яумана, определяемая по формуле

$$\frac{\bar{d}S_{ij}}{dt} = \frac{dS_{ij}}{dt} - S_{ik}\omega_{j_k} - S_{jk}\omega_{ik}\,, \tag{9}$$

где $2\omega_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i},\;\; 2d_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$

Параметр $\lambda > 0$ в ходе пластической деформации.

При $\lambda = 0$ (8) становится законом Гука.

Параметр λ можно определить, используя условие пластичности (7)

$$\lambda = \frac{2\mu w - F'(P)(dP/dt)}{2F(p)}. \tag{10}$$

Формула (10) имеет место только тогда, когда $J_2 = F(p)$ *и* $\lambda > 0$.

В противном случае $\lambda = 0$.

Параметр λ можно представить в виде [1].

$$\lambda = \frac{2\mu w - F'(P)(dP/dt)}{2F(p)}\,H[J_2 - F(p)]H\left[2\mu w - F'(P)\,\frac{dP}{dt}\right]. \tag{11}$$

Итак, выражение (8), (9) и (11) дают полное описание деформаций сдвига. Для функции $F(p)$ в [1] предложено соотношение

$$F(p) = (kP + \beta)^2\,, \qquad (12)$$

где k и b — постоянные.

Таково краткое содержание модели Григоряна.

Прежде чем продолжать, напомним, что математические модели получили широкое распространение для исследования эффектов подземного взрыва примерно с середины прошлого века [2]. Однако, они, как правило, не учитывали многие факты и поэтому не охватывали детали всего процесса.

Поэтому при серьёзных исследованиях использовали модель Григоряна [3–5], и, в частности, при решении задачи о подземном ядерном взрыве [6]. Однако, во всех случаях, учитывая сложность, приходилось вводить упрощающие предположения, что давало возможность привести дифференциальные уравнения к виду, удобному для интегрирования или численного исследования [4, 7].

В этой связи, рассмотрим возможность исследования модели Григоряна методом характеристик [8, 9]. Пусть на границе полупространства $x_1 \geq 0$ (рис. 2), заполненного средой, определяемой уравнениями Григоряна, заданы краевые условия вида

$$\sigma_{11} = -P_0\,, \qquad \sigma_{12} = q_0\,. \qquad (13)$$

Будем считать, что касательные напряжения σ_{13}, σ_{23} и составляющая переменная в направлении оси x_2 отсутствуют. Остальные составляющие тензора напряжений и составляющие перемещения не зависят от координат x_2 и x_3. Следовательно,

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0,\;\; u_1 = u_3 = 0\,,$$

$$d_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\,,\;\; d_{21} = d_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\,, \qquad (14)$$

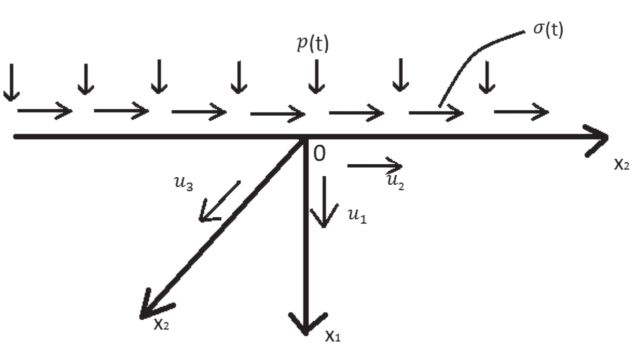

Рис. 2. Модель плоской задачи

$$d_{13} = d_{12} = d_{23} = d_{31} = d_{32} = d_{33} = 0,$$

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = \omega_{13} = \omega_{31} = \omega_{32} = \omega_{23} = 0,$$

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = -\frac{1}{2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}.$$

Теперь уравнение (8) можно представить в виде

$$\frac{4}{3}\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{dS_{11}}{dt} + S_{12}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \lambda S_{11}\,,$$

$$-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{dS_{22}}{dt} - S_{21}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \lambda S_{22}\,,$$

$$-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{dS_{33}}{dt} + \lambda S_{33}\,,$$

$$\mu\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{dS_{12}}{dt} + \frac{1}{2}(S_{22} - S_{11})\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \lambda S_{12}\,. \qquad (15)$$

Если ввести обозначения $\gamma = \sigma_{22} - \sigma_{33}$ и учесть, что

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_2\frac{\partial}{\partial x}\,,\; S_{ij} = \sigma_{ij} + P\delta_{ij}$$

то вместо (15) получим

$$\frac{4}{3}\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial(\sigma_{11}+p)}{\partial t} + v_1\frac{\partial(\sigma_{11}+p)}{\partial x_1} +$$

$$+\sigma_{12}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \lambda(\sigma_{11}+P)\,,$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} - \sigma_{12}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_1\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} + \lambda\gamma = 0\,,$$

$$\mu\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial t} + v_1\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} +$$

$$+\frac{1}{4}[\gamma - 3(\sigma_{11}+P)]\frac{\partial v_2}{\partial X1} + \lambda\sigma_{12}\,, \qquad (16)$$

где $3p = -(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$

Условие (7) примет вид

$$\frac{3}{4}(\sigma_{11}+P)^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 + \sigma_{12}^2 = F(P)\,. \qquad (17)$$

Уравнение движения и уравнение сохранения массы приобретают вид

$$\rho\frac{\partial v_1}{\partial t}+\rho v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}$$

$$\rho\frac{\partial v_2}{\partial t}+\rho v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=0\,, \qquad (18)$$

Параметр λ определится формулой

$$\lambda=\frac{\mu}{F(P)}\left[(\sigma_{11}+P)\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\sigma_{12}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right]-$$

$$-\frac{F'(P)(dP/dt)}{2F(P)}. \qquad (19)$$

Система уравнений (16) — (19) вместе с уравнением (1) для случая $\partial P/\partial t>0$ или вместе с уравнением (2) для случая $\partial P/\partial t<0$ является замкнутой системой уравнений для рассматриваемой задачи (при конечных деформациях).

При малости градиентов деформации, систему уравнений можно свести к виду

$$\frac{4}{3}\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=\frac{\partial(\sigma_{11}+P)}{\partial t}+\lambda(\sigma_{11}+P)\,,$$

$$\mu\frac{dv_2}{\partial x_1}=\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial t}+\lambda\sigma_{12}\,,$$

$$\rho_0\frac{\partial v_1}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1},\ \ \rho_0\frac{\partial v_2}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}\,, \qquad (20)$$

$$\tfrac{3}{4}(\sigma_{11}+P)^2+\sigma^2{}_{12}=F(P)\,,\gamma=0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-K\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\text{ при }\frac{dP}{dt}>0\text{ и }\rho=\rho_*(\mathrm{x}_1)\ \text{ при }\frac{dP}{dt}<0$$

$$\lambda=\mu\frac{\sigma_{11}+P}{F(P)}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\mu\sigma_{12}\frac{1}{F(P)}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{F'(P)}{2F(P)}\frac{\partial P}{\partial t}$$

В области упругих деформаций уравнение (20) значительно упрощается, так как при этом $\lambda=0$.

Систему (20) можно заменить эквивалентной ей системой вдоль характеристик [8]

$$d\sigma_{11}\pm\rho_0\,\mathrm{d}_1\,dv1=0\ \text{ при x}=\pm\,\mathrm{a}_1 t+const$$

$$d\sigma_{12}\pm\rho_0\,\mathrm{a}_2\,dv_2=0\text{ при x}=\pm\,\mathrm{a}_2\,t+\mathrm{const}$$

где $a_1^2=(3K+4\mu)/\rho_0$, $a_2^2=\mu/\rho_0$

Отсюда следует, что имеет место взаимодействие двух волн Римана — продольных и поперечных [9].

В области пластических деформаций ($\lambda>0$) поперечные волны связаны с продольными.

Рассмотрим частное решение этой задачи, относящееся к распространению продольно-поперечных волн при краевых условиях [10].

$$\sigma_{11}=\sigma_1,\ \sigma_{12}=\tau_1\ \text{ при } x_1=0,\ t\geq 0\,. \qquad (22)$$

При этом напряжения σ_1 и τ_1 постоянны и возникают на границе полупространства внезапно.

Начальные условия

$$\sigma_{11}=\sigma_0,\ \sigma_{12}=\tau_0,\ v_1=v_2=0\text{ при }t=0,\ x\geq 0. \qquad (23)$$

При краевых условиях (11) задача упрощается и становится автомодельной.

Приравняв нулю характеристический определитель (8) системы (20), получим характеристическое уравнение

$$a^4-\left[(1+kS)K+\frac{4-S^2}{3}\mu\right]a^2+\mu KS(S+k)=0, \qquad (24)$$

где $a^2=\rho_0\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$, $S^2=1-\frac{\sigma_{12}}{F(P)}$, $k=\frac{F'(P)}{\sqrt{3F(P)}}$.

Уравнение (24) получено без ограничений на величины K, μ, k. В [10]. Эти величины приняты постоянными и $\mu<(1+k)\,K$.

При краевых условиях (22) все величины будут зависеть от одной безразмерной переменной.

$$U=x\,/\,t=a\,/\,\sqrt{\rho_0}\,. \qquad (25)$$

Так как a зависит только от S, то и все остальные величины, входящие в уравнение (20), также будут зависеть только от S. Используя (25), систему дифференциальных уравнений с частными производными (15) можно заменить системой обыкновенных дифференциальных уравнений [8]. После некоторых преобразований получим

$$\frac{d\sqrt{F}}{dS}=\frac{kK\sqrt{F}}{a^2-(1+kS)K}\,. \qquad (26)$$

Интегрируя (26), найдем

$$\sqrt{F(P)} = \sqrt{F(\rho_0)}exp\left(\int \frac{kK}{a^2(\xi) - (1 + k\xi)k} d\xi\right), \quad (27)$$

где ρ_0 и S_0 соответствуют значениям ρ и S перед первой волной и определяются из начальных условий задачи. В (27) интегрирование осуществляется от S_0 до S.

Зная F(р), можно определить все искомые величины. Исключая в (27) корни уравнения (24), получим семейство решений систем уравнений задачи (20).

Уравнение (24) имеет четыре корня: два положительных и два отрицательных, отвечающих обратным волнам — продольным и поперечным.

Система уравнений (20) определяет пластические деформации сдвига, когда $\lambda > 0$. Используя (24) и преобразование

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{a}{\sqrt{\rho_0}} \frac{\partial}{\partial x_1},$$

вытекающее из определения безразмерной переменной (25), из системы уравнений (20) получим следующее выражение для параметра λ

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2S\sqrt{F}}\left[a^2 - \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\right]\frac{\partial v_1}{\partial x_1}. \quad (28)$$

Условие $\lambda > 0$ приводит к неравенствам

$$a^2 < K + \frac{4}{3}\mu \text{ при } \frac{\partial v_1}{\partial x_1} < 0$$
$$a^2 > K + \frac{4}{3}\mu \text{ при } \frac{\partial v_1}{\partial x_1} > 0. \quad (29)$$

Пусть, к примеру, в процессе нагрузки выполнено условие $\frac{4}{3}\mu > kK$, а в процессе разгрузки

$$kK > \frac{4}{3}[1 + (4 + k) / 4(1 + k)],$$

тогда волновое решение на координатной плоскости будет иметь вид (рис. 3). Области I, III, V это области постоянных напряжений. В области II распространяется быстрая простая волна, а в области IV — медленная простая волна. В области I, согласно начальному условию, имеем $\sigma_{11} = \sigma_0$, $\sigma_{12} = \tau_0$, $v_1 = v_2 = 0$. В области V при краевых условиях (22) имеем $\sigma_{11} = \sigma_1$, $\sigma_{22} = \tau_1$.

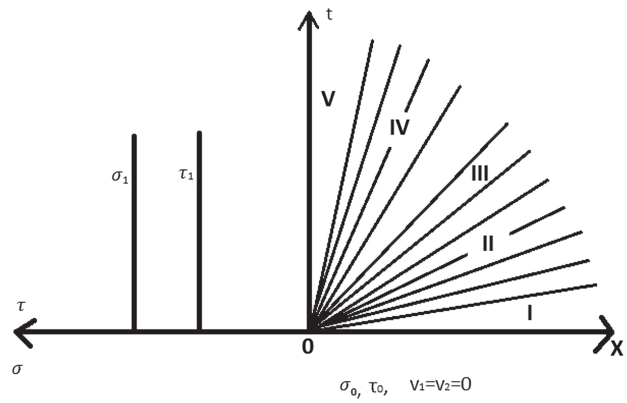

Рис. 3. Вид волнового решения на координатной плоскости

Для определения решения в областях II, III, IV следует воспользоваться уравнением (27), условием $\sigma_{12} = \sqrt{1 - s^2 F(P)}$ и условием текучести (17) при $\gamma = 0$, Анализ решений проводится в плоскости σ_{12},Ƶ), где $Ƶ = \sqrt{F(P)}$. Заметим, что уравнение (17) при $\gamma = 0$ однозначно описывает связь между σ_{11}, σ_{12} и σ_{12}, Ƶ.

Для исследования изменения напряжения состояния во времени при фиксированном x используется уравнение (17), в котором в случае перехода через быстрые простые волны следует принять $a^2 = a_1^2$, а при переходе через медленные простые волны принимается $a^2 = a_2^2$. В зависимости от положения точки $(Ƶ_0, \tau_0)$ (начальные условия задачи) получаются различные решения [8, 10].

В заключении отметим, что до сих пор не существует полного решения задачи о распространении продольно-поперечных волн в среде, описываемой уравнениями динамики грунтов Григоряна для нагрузок, произвольно меняющихся во времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов // Прикладная математика и механика. 1960. № 6. С. 1057–1072.

2. Адушкин В.В., Костюченко В.Н., Николаевский В.Н., Цветков В.М. Механика подземного взрыва // Итоги науки и техники, Сер.: Механика твердого деформируемого тела). ВИНИТИ, 1977. Т. 7. С. 87–197.

3. Григорян С. С. К решению задачи о подземном взрыве в мягких грунтах // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. № 6. С. 1072–1082.

4. Григорян С. С. О приближенном решении некоторых задач динамики грунтов // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. № 5. С. 944–946.

5. Григорян С. С., Евтерев Л. С. О действии сильного взрыва на поверхности скального полупространства // ДАН СССР. 1975. Т. 222. № 3. С. 544–547.

6. Фачиоли Э., Анг А. Х.-С. Дискретная Эйлерова модель распространения сферической волны в сжимаемой среде // Действие ядерного взрыва. М.: Мир, 1971. С. 163–263.

7. Григорян С. С. О некоторых упрощениях в описание движения мягких грунтов // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. № 2. С. 287–294.

8. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.

9. Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П., Челишев В. П., Шехтер Б. И. Физика взрыва. М.: Наука, 1975. 704 с.

10. Скобеев А. М. О плоской упругопластической волне // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 28. № 3. С. 1121–1128.

DOI: 10.25558/VOSTNII.2025.56.69.004
UDC 624.131+ 539.215

R. Z. KAMALYAN
Doctor of Engineering Sciences, Professor,
Professor of Department
Russian University of Cooperation, Krasnodar
e–mail: kasarub@gmail.com

S. R. KAMALYAN
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Head of the Department of the Southern Interregional Security Department
PJSC «Gazprom», Krasnodar
e–mail: kasarub@gmail.com

N. S. NESTEROVA
Candidate of Engineering Sciences,
Associate Professor
IMIT, Krasnodar
e–mail: nnnnnnn46@mail.ru

ON THE MODEL STUDY OF GROUND MOVEMENTS UNDER STRONG DYNAMIC INFLUENCE

Mathematical models have been widely used to study the effects of an underground explosion since about the middle of the last century.

Among the many models, the most complete description of the processes accompanying an underground explosion is presented in Grigoryan's model.

The paper analyzes this model and considers the possibility of its investigation by the method of characteristics.

Keywords: MODEL, DENSITY, DEFORMATION, STRESS, CHARACTERISTICS.

REFERENCES

1. Grigoryan S. S. On the basic concepts of soil dynamics // Applied Mathematics and Mechanics. 1960. No. 6. P. 1057–1072. [In Russ.].

2. Adushkin V.V., Kostyuchenko V.N., Nikolaevsky V.N., Tsvetkov V.M. Mechanics of underground explosion // Results of Science and Technology, Ser.: Mechanics of a rigid deformable body). VINITI, 1977. Vol. 7. P. 87–197. [In Russ.].

3. Grigoryan S. S. Towards solving the problem of an underground explosion in soft soils // Applied Mathematics and Mechanics. 1964. Vol. 28. No. 6. P. 1072–1082. [In Russ.].

4. Grigoryan S. S. on the approximate solution of some problems of soil dynamics // Applied Mathematics and Mechanics. 1962. Vol. 26. No. 5. P. 944–946. [In Russ.].

5. Grigoryan S. S., Evterev L. S. On the effect of a strong explosion on the surface of a rocky half-space // DAN USSR. 1975. Vol. 222. No. 3. P. 544–547. [In Russ.].

6. Facioli E., Ang A. H.-S. Discrete Eulerian model of spherical wave propagation in a compressible medium // The effect of a nuclear explosion. Moscow: Mir, 1971. P. 163–263. [In Russ.].

7. Grigoryan S. S. On some simplifications in the description of the motion of soft soils // Applied Mathematics and Mechanics. 1963. Vol. 27. No. 2. P. 287–294. [In Russ.].

8. Novatsky V. K. Wave problems of the theory of plasticity. Moscow: Mir, 1978. 307 p. [In Russ.].

9. Baum F. A., Orlenko L. P., K. Stanyukovich. P., Chelishev V. P., Shekhter B. I. Physics of explosion. Moscow: Nauka, 1975. 704 p. [In Russ.].

10. Skobeev A. M. On a plane elastoplastic wave // Applied Mathematics and Mechanics. 1965. Vol. 28. No. 3. P. 1121–1128. [In Russ.].