

DOI: 10.25558/VOSTNII.2023.23.46.004

УДК 622.272:516.02

© С.В. Черданцев, П.А. Шлапаков, Е.А. Шлапаков, С.А. Хаймин, В.В. Колыхалов,  
К. С. Лебедев, 2023

**С.В. ЧЕРДАНЦЕВ**

д-р техн. наук,  
главный научный сотрудник  
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово  
e-mail: svch01@yandex.ru



**П.А. ШЛАПАКОВ**

канд. техн. наук,  
заведующий лабораторией  
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово  
e-mail: shlapak1978@mail.ru



**Е.А. ШЛАПАКОВ**

научный сотрудник  
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово  
e-mail: lairxx@yandex.ru



**С.А. ХАЙМИН**

старший научный сотрудник  
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово  
e-mail: hsa007@mail.ru



**В.В. КОЛЫХАЛОВ**

старший научный сотрудник  
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово  
e-mail: X77kem@mail.ru



**К.С. ЛЕБЕДЕВ**

старший научный сотрудник  
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово  
e-mail: lebedevks1987@yandex.ru



## РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ШАХТНОЙ ПЕРЕМЫЧКИ НА БАЗЕ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ ТОНКОЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНЫ

Разработка угольных месторождений сопровождается выделением метана из разрушенного угля и образованием пылегазовоздушных смесей, предрасположенных к химическому реактивированию, в результате чего в шахтной атмосфере образуются дефлаграционные и детонационные волны, что может привести к авариям с катастрофическими последствиями. С целью предотвращения распространения газодинамических и теплофизических процессов в атмосфере горных выработок на угольных предприятиях применяют шахтные перемычки, для которых разработаны различные конструкции и технологические схемы возведения. Однако надежные методики расчета перемычек пока не созданы. В последнее время в ряде работ обсуждались различные варианты расчетных схем шахтных перемычек, включая расчетные схемы массивного тела и толстой плиты в рамках моделей линейной теории упругости. В данной статье обсуждается напряженное состояние шахтной перемычки, изготовленной из тонкой круглой пластины. При постановке краевой задачи учитывается не только изгиб перемычки, но также растяжение ее срединной поверхности, в силу чего краевая задача становится нелинейной, решение которой реализовано с помощью полуобратного метода Сен-Венана. В результате найдены компоненты напряжений в перемычке под действием статического давления ударной волны. Построены графики напряжений и отмечены некоторые закономерности распределения напряжений в шахтной перемычке.

Ключевые слова: ГОРНЫЕ ВЫРАБОТКИ, ШАХТНЫЕ ПЕРЕМЫЧКИ, КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ, ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ТОНКОЙ ПЕРЕМЫЧКИ, ФУНКЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ, ПОЛУОБРАТНЫЙ МЕТОД СЕН-ВЕНАНА.

### ВВЕДЕНИЕ

При отработке угольных пластов, склонных к самовозгоранию [1], проявлению газодинамических [2–4], дефлаграционных и детонационных процессов [5–8] нормативные требования эксплуатации регламентируют осуществлять изоляцию выработанных пространств от действующих горных выработок. Процесс изоляции осуществляется возведением шахтных перемычек. Конструкции и параметры шахтных перемычек рекомендуется принимать на основе их прочностных расчетов. Однако в действующей нормативной документации пока отсутствует методика выполнения прочностных расчетов по обоснованию параметров шахтных перемычек.

В последнее время появился ряд работ, посвященных различным подходам к расчету перемычек цилиндрической формы. Так, в статье [9] предпринята попытка построения пространственной модели перемычки на базе

волновой теории. Найдены фазовая скорость, частота ударной волны и компоненты напряжений в бетонной перемычке.

В статьях [10, 11] рассматривается осесимметричная краевая задача теории упругости о равновесии шахтной перемычки в статической постановке, а в статье [12] обсуждается модель шахтной перемычки на основе классической модели толстой плиты в линейной постановке. В ходе решения данных задач получены формулы для определения компонентов напряженного состояния в шахтной бетонной перемычке, построены графики компонентов напряжений и выявлены некоторые закономерности их распределения в перемычке.

Несмотря на то, что в статьях [10–12] отмечался некорректный подход к расчету перемычек на базе модели тонкой пластины, в данной статье рассматривается использование именно тонкой, гибкой пластины для

разработки расчетной модели перемычки круглого поперечного сечения (рис. 1) при условии, что толщина  $h$  перемычки составляет всего 0,1 от ее радиуса. Разработка расчетной модели выполняется в рамках следующих допущений:

1) горная выработка круглого поперечного сечения, в которой жестко установлена перемычка в виде тонкого круглого диска радиуса  $R$ ;

2) перемычка изготовлена из металла, представляющего собой упругое тело;

3) давление на фронте ударной волны распределено равномерно по площади перемычки, в силу чего ее деформация будет симметричной относительно ее продольной оси.

### ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ТОНКОЙ ПЕРЕМОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

Поскольку перемычка представляет собой круглый диск, то вместо прямоугольной системы координат удобнее использовать цилиндрическую систему. Совместим ось  $z$  с осью симметрии перемычки, а начало координат  $O$  разместим в срединной плоскости перемычки (рис. 1). Расстояние произвольной точки от оси  $z$  обозначим буквой  $r$ , а полярный угол буквой  $\varphi$ .

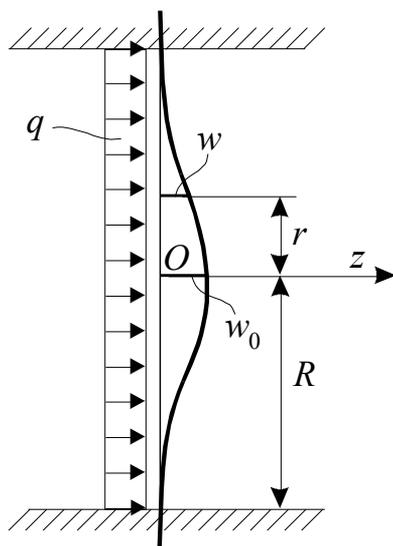


Рис. 1. Шахтная перемычка, изготовленная из круглой тонкой пластины

В силу 3-го допущения все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние тонкой перемычки, будут функциями только полярной координаты  $r$ . Следовательно, деформации сдвига и кручения, обусловленные изгибом перемычки, равны нулю, а компоненты деформации  $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi$  выражаются формулами [13, 14]:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad (1)$$

где  $u, w$  — компоненты перемещения, соответственно в направлении  $r$  и  $z$ .

Из анализа выражений (1) вытекает, что каждое из них содержит перемещение  $u$  и поэтому они не являются независимыми. Исключив из выражений (1) перемещение  $u$ , получим уравнение совместности деформаций:

$$\frac{d}{dr} (r \cdot \varepsilon_\varphi) - \varepsilon_r = -\frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2. \quad (2)$$

Главные кривизны  $\kappa_r, \kappa_\varphi$  изогнутой срединной поверхности пластинки можно определить по формулам [15]

$$\kappa_r = \frac{d\theta}{ds}, \quad \kappa_\varphi = \frac{1}{r} \sin \theta, \quad (3)$$

где  $ds$  — дифференциал дуги срединной поверхности пластины,  $\theta$  — угол наклона касательной плоскости к срединной поверхности в произвольной точке. Так как имеют место соотношения:

$$ds = \sqrt{dr^2 + dw^2} = dr \sqrt{1 + \left( \frac{dw}{dr} \right)^2}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{dw}{dr},$$

полагая, что угол поворота  $\theta = 1$ , преобразуем формулы (3), (4) к виду

$$\kappa_r = \frac{d\theta}{dr}, \quad \theta = -\frac{dw}{dr}, \quad \kappa_\varphi = \frac{1}{r} \cdot \theta. \quad (5)$$

В силу формул (5), кривизны изогнутой поверхности пластины представляются в виде

$$\kappa_r = -\frac{d^2w}{dr^2}, \quad \kappa_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr}. \quad (6)$$

Далее составим уравнения равновесия бесконечно малого элемента перемычки в проекциях на направления  $r, \varphi, z$  [13, 14]:

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\varphi = 0, \quad (7)$$

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r}{r} - \frac{M_\varphi}{r} = -Q, \quad (8)$$

$$Q + \sigma_r h \theta = \Psi, \quad (9)$$

где  $h$  — толщина перемычки, а  $\Psi$  — функция напряжений, определяемая по формуле:

$$\Psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr = \frac{qr}{2}, \quad (10)$$

в которой мы учли 3-е допущение о том, что  $q = const$ .

Напряжения в срединной поверхности пластины связаны с деформациями зависимостями [13, 14, 16]:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\varphi), \quad (11)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\varphi + \mu \varepsilon_r),$$

вытекающими из обобщенного закона Гука.

Учтем, что изгибающие моменты связаны с компонентами кривизны срединной поверхности пластин зависимостями [13, 14]:

$$M_r = D(\kappa_r + \mu \kappa_\varphi), \quad M_\varphi = D(\kappa_\varphi + \mu \kappa_r), \quad (12)$$

в которых  $D$  — является цилиндрической жесткостью пластины, определяемой как

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad (13)$$

где  $E, \mu$  — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала перемычки.

Уравнение равновесия (7) будет тождественно выполняться, если напряжения в срединной поверхности выразить с помощью функции напряжений  $\Phi$  следующим образом [16]

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \quad \sigma_\varphi = \frac{d^2\Phi}{dr^2}. \quad (14)$$

Сопоставляя (8) и (9), приходим к уравнению

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r}{r} - \frac{M_\varphi}{r} = -\Psi + h\sigma_r\theta, \quad (15)$$

подставив в которое выражения (12) и учитывая, что кривизны  $\kappa_r, \kappa_\varphi$  определяются соотношениями (5), получим:

$$D \left( \frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{\theta}{r^2} \right) = -\Psi + h\sigma_r\theta. \quad (16)$$

«Свернув» выражение в скобках и используя первую формулу (14), перепишем уравнение (16) в виде

$$D \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\theta) \right] = -\Psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \theta. \quad (17)$$

Если угол поворота  $\theta$  в полученном уравнении выразить через прогиб  $w$  по второй формуле (5), то получим следующее уравнение:

$$D \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \Psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dw}{dr}. \quad (18)$$

Подставив в (11) вместо напряжений их выражения из (14), получим формулы:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left( \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \mu \frac{d^2\Phi}{dr^2} \right), \quad (19)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} \left( \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \mu \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right),$$

в силу которых уравнение совместности деформаций (2) представляется в виде

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi}{dr} \right) \right] = -\frac{E}{2r} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2. \quad (20)$$

Уравнения (18) и (20) образуют систему дифференциальных уравнений, являющуюся наиболее полной системой, описывающей равновесие круглой гибкой пластинки.

Система (18), (20) допускает ряд упрощений. Так, например, для круглой жесткой пластинки, прогиб которой мал, угол поворота  $\theta = -dw/dr$  является величиной малой, тогда квадрат угла поворота будет иметь более высокий порядок малости и поэтому можно принять, что  $(dw/dr)^2 \rightarrow 0$ . Кроме этого, если пластинка жесткая, то напряжениями  $\sigma_r, \sigma_\varphi$

срединной поверхности можно пренебречь по сравнению с напряжениями от действия изгибающих моментов. Поэтому, положив  $\sigma_r = \sigma_\varphi = 0$ , из формул (14) следует, что функция напряжений  $\Phi = \text{const}$ , в связи с чем левая часть (20) равна нулю, а само уравнение (20) превращается в тождество и может быть исключено из дальнейшего рассмотрения. Из сказанного вытекает, что для равновесия жестких пластин достаточно учесть только одно уравнение (18), которое в этом случае приводится к виду:

$$D \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \Psi. \quad (21)$$

Если же пластина является гибкой, то ее толщина  $h$  мала, а величина  $h^3$  стремится к нулю. Но тогда и цилиндрическая жесткость пластины  $D$  также стремится к нулю. В связи со сказанным, уравнение (18) приводятся к виду:

$$\frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dw}{dr} = -\Psi, \quad (22)$$

где прогиб и угол поворота срединной поверхности могут быть значительными, в связи с чем уравнение (20) остается без изменений.

Далее мы будем рассматривать системы уравнений (18) и (20) без каких-либо упрощений и укажем для нее граничные условия. Поскольку оба уравнения (18) и (20) имеют третий порядок, то в результате их интегрирования появляются шесть постоянных, для определения которых необходимо указать шесть граничных условий.

Граничные условия для искомого прогиба  $w$  составим исходя из следующих рассуждений. Во-первых, ввиду жесткого защемления контура пластинки, отсутствуют перемещения и углы поворота на контуре пластины. Во-вторых, ввиду осевой симметрии угол поворота в центре пластинки будет также равен нулю. В силу сказанного, граничные условия для  $w$  представляются в виде:

$$\begin{aligned} w|_{r=R} = 0, \quad \theta|_{r=R} = - \left( \frac{dw}{dr} \right) \Big|_{r=R} = 0, \\ \theta|_{r=0} = - \left( \frac{dw}{dr} \right) \Big|_{r=0} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

При формулировании граничных условий для функции  $\Phi$  в первую очередь учтем, что при жестком защемлении перемещение точек контура в радиальном направлении отсутствуют, т. е.  $u|_{r=R} = 0$ .

Но тогда из второй формулы (1) следует, что и деформация  $\varepsilon_\varphi$  на контуре пластины

$$\varepsilon_\varphi|_{r=R} = 0. \quad (24)$$

Подставляя в условие (24) вторую формулу (19), получим первое граничное условие для функции  $\Phi$ :

$$\left( \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{\mu}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) \Big|_{r=R} = 0. \quad (25)$$

Еще одно граничное условие вытекает из первой формулы (14), переписав которую в виде

$$\sigma_r \cdot r = \frac{d\Phi}{dr},$$

видим, что в точке  $r = 0$

$$\frac{d\Phi}{dr} \Big|_{r=0} = 0. \quad (26)$$

Других граничных условий для функции  $\Phi$  при жестком защемлении мы составить не можем. Однако двух граничных условий (25) и (26) оказывается вполне достаточно, поскольку формулы (14) и (19) содержат не саму функцию  $\Phi$ , а лишь ее производные. Следовательно, вместо шести граничных условий, достаточно ограничиться только пятью.

Совокупность уравнений (18), (20) и граничных условий (23), (25), (26) образует краевую задачу о напряженно-деформированном состоянии тонкой круглой перемычки.

### ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ТОНКОЙ ПЕРЕМОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

Поскольку сформулированная краевая задача является нелинейной, то получить ее решение в замкнутом виде не представляется возможным. Поэтому здесь построим приближенное решение данной задачи, исполь-

зую так называемый «полуобратный» метод Сен-Венана [17].

Сущность данного метода заключается в том, что, учитывая физическую сущность рассматриваемой конкретной задачи, предугадывают некоторые черты ее математического решения, принимая те или иные качественные закономерности для перемещений или напряжений. Затем, руководствуясь уже математическим аппаратом теории упругости, проверяют, не противоречат ли сделанные предположения соответствующим дифференциальным уравнениям, и находят из последних количественные значения искомым величин.

В силу сказанного, представим прогиб пластины следующей функцией:

$$w = w_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2, \quad (27)$$

где  $w_0$  — прогиб в центре пластины, который далее будем называть стрелой прогиба. Легко заметить, что функция (27) удовлетворяет первому граничному условию (23). Чтобы проверить выполнение остальных граничных условий, найдем угол поворота, продифференцировав (27):

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{dw}{dr} = \frac{d}{dZ} [f(Z)] \frac{dZ}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dr} = \\ &= 2w_0 Z \cdot (-2\xi) \left( \frac{1}{R} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

где обозначено:

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad Z = 1 - \xi^2, \quad f(Z) = w_0 \cdot Z^2. \quad (29)$$

Подставляя (29) в формулу (28), получаем функцию для угла поворота:

$$\theta = \frac{dw}{dr} = -\frac{4w_0}{R} \left( \frac{r}{R} - \frac{r^3}{R^3} \right), \quad (30)$$

которая удовлетворяет второму и третьему граничным условиям (23).

Следовательно, выбор функции  $w$  в виде (27) оказался вполне оправданным, поскольку в этом случае удовлетворяются все три граничных условия (23) для функции  $w$ .

Далее, подставив найденную функцию (30) в уравнение (20), получим уравнение:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi}{dr} \right) \right] = -\frac{8Ew_0^2}{R^2 r} \left( \frac{r}{R} - \frac{r^3}{R^3} \right)^2, \quad (31)$$

интегрируя которое один раз, найдем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\frac{8Ew_0^2}{R^2} \left( \frac{r^2}{2R^2} - \frac{r^4}{2R^4} + \frac{r^6}{6R^6} \right) + C_1,$$

а после второго интегрирования получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} &= -\frac{2Ew_0^2}{R} \left( \frac{r^3}{2R^3} - \frac{r^5}{3R^5} + \frac{r^7}{12R^7} \right) + \\ &+ C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}. \end{aligned} \quad (32)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  воспользуемся граничными условиями (25) и (26). Вначале подставим выражение (32) в условие (26) и найдем постоянную  $C_2 = 0$ . Далее продифференцировав (32)

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} = -\frac{2Ew_0^2}{R^2} \left( \frac{3r^2}{2R^2} - \frac{5r^4}{3R^4} + \frac{7r^6}{12R^6} \right) + C_1 \frac{1}{2}, \quad (35)$$

и подставив выражения (32) и (35) в граничное условие (25), получим уравнение:

$$\begin{aligned} &-\frac{2Ew_0^2}{R^2} \left( \frac{3R^2}{2R^2} - \frac{5R^4}{3R^4} + \frac{7R^6}{12R^6} \right) + C_1 \frac{1}{2} - \\ &-\frac{\mu}{R} \left[ -\frac{2Ew_0^2}{R} \left( \frac{R^3}{2R^3} - \frac{R^5}{3R^5} + \frac{R^7}{12R^7} \right) + C_1 \frac{R}{2} \right] = 0, \end{aligned}$$

из которого находим

$$C_1 = \frac{5-3\mu}{1-\mu} \cdot \frac{Ew_0^2}{3R^2}. \quad (36)$$

Подставив постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  в выражение (32), найдем сначала первую производную:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Ew_0^2}{6R} \left( \frac{5-3\mu}{1-\mu} \bar{r} - 6\bar{r}^3 + 4\bar{r}^5 - \bar{r}^7 \right), \quad (37)$$

а затем по формуле (35) найдем вторую производную:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} = \frac{Ew_0^2}{6R^2} \left[ \frac{5-3\mu}{1-\mu} - 18\bar{r}^2 + 20\bar{r}^4 - 7\bar{r}^6 \right], \quad (38)$$

где  $\bar{r} = r/R$ .

Поскольку производные  $d\Phi/dr$ ,  $d^2\Phi/dr^2$  найдены, то по формулам (14) определяем напряжения в срединной поверхности пластины:

$$\sigma_r = \frac{Ew_0^2}{6R^2} \left( \frac{5-3\mu}{1-\mu} - 6\bar{r}^2 + 4\bar{r}^4 - \bar{r}^6 \right) = \frac{E\delta^2\bar{h}^2}{6} \left( \frac{5-3\mu}{1-\mu} - 6\bar{r}^2 + 4\bar{r}^4 - \bar{r}^6 \right), \quad (39)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{Ew_0^2}{6R^2} \left( \frac{5-3\mu}{1-\mu} - 6\bar{r}^2 + 4\bar{r}^4 - \bar{r}^6 \right) = \frac{E\delta^2\bar{h}^2}{6} \left( \frac{5-3\mu}{1-\mu} - 18\bar{r}^2 + 20\bar{r}^4 - 7\bar{r}^6 \right), \quad (40)$$

где 
$$\delta = \frac{w_0}{h}, \quad \bar{h} = \frac{h}{R}. \quad (41)$$

Далее, по формулам (6) определяем компоненты кривизны:

$$\kappa_r = -\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{d}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{d}{dr} \left[ -\frac{4w_0}{R} \left( \frac{r}{c} - \frac{r^3}{c^3} \right) \right] = \frac{4w_0}{R^2} (1-3\bar{r}^2),$$

$$\kappa_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{1}{r} \left[ -\frac{4w_0}{R} \left( \frac{r}{R} - \frac{r^3}{R^3} \right) \right] = \frac{4w_0}{R^2} (1-\bar{r}^2),$$

затем находим изгибающие моменты по формулам (12):

$$M_r = 4D \frac{w_0}{R^2} \left[ (1-3\bar{r}^2) + \mu(1-\bar{r}^2) \right],$$

$$M_\varphi = 4D \frac{w_0}{R^2} \left[ (1-\bar{r}^2) + \mu(1-3\bar{r}^2) \right] \quad (42)$$

и напряжения, обусловленные изгибающими моментами:

$$\sigma_{r,u} = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{6}{h^2} 4D \frac{w_0}{R^2} \left[ (1-3\bar{r}^2) + \mu(1-\bar{r}^2) \right] = \frac{2E}{1-\mu^2} \cdot \delta \cdot \bar{h}^2 \left[ 1 + \mu - (3+\mu)\bar{r}^2 \right], \quad (43)$$

$$\sigma_{\varphi,u} = \frac{6M_\varphi}{h^2} = \frac{6}{h^2} 4D \frac{w_0}{R^2} \left[ (1-\bar{r}^2) + \mu(1-3\bar{r}^2) \right] = \frac{2E}{1-\mu^2} \cdot \delta \cdot \bar{h}^2 \left[ 1 + \mu - (1+3\mu)\bar{r}^2 \right]. \quad (44)$$

Анализируя формулы (39), (40), (43), (44), замечаем, что найденные напряжения не определены, поскольку стрела прогиба  $w_0$  и, следовательно, величина  $\delta$  неизвестны. Для их определения перейдем к рассмотрению уравнения (18).

Вначале преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках в левой части уравнения (18), учитывая при этом формулу (30):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{4w_0}{R^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r^2 - \frac{r^4}{R^2} \right) = -\frac{8w_0}{R^2} \left( 1 - \frac{2r^2}{R^2} \right),$$

и, следовательно,

$$D \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] = D \frac{d}{dr} \left[ -\frac{8w_0}{R^2} \left( 1 - \frac{2r^2}{R^2} \right) \right] = D \frac{32w_0 \cdot r}{R^4}. \quad (45)$$

Подставив выражения (10), (30), (32) и (45) в уравнение (18), получим:

$$D \frac{32w_0 \cdot r}{R^4} = \frac{qr}{2} + \frac{h}{r} \cdot \frac{Ew_0^2}{6R} \left( \frac{5-3\mu}{1-\mu} \bar{r} - 6\bar{r}^3 + 4\bar{r}^5 - \bar{r}^7 \right) \left[ -\frac{4w_0}{R} \left( \frac{r}{R} - \frac{r^3}{R^3} \right) \right]$$

и после преобразований приходим к следующему уравнению:

$$32Dw_0\bar{r} + \frac{2}{3} \frac{h}{\bar{r}} Ew_0^3 \left( \frac{5-3\mu}{1-\mu} \bar{r} - 6\bar{r}^3 + 4\bar{r}^5 - \bar{r}^7 \right) (\bar{r} - \bar{r}^3) = \frac{qR^4}{2} \bar{r}. \quad (46)$$

Далее воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому работа всех сил, действующих на рассматриваемое тело, на любом бесконечно малом возможном перемещении равна нулю [17].

Работу сил определим, умножив обе части уравнения (46) на бесконечно малое возможное перемещение  $\delta w$  и проинтегрировав в пределах радиуса пластинки:

$$\int_0^1 \left[ 32Dw_0\bar{r} + \frac{2}{3} \frac{h}{\bar{r}} Ew_0^3 \left( \frac{5-3\mu}{1-\mu} \bar{r} - 6\bar{r}^3 + 4\bar{r}^5 - \bar{r}^7 \right) (\bar{r} - \bar{r}^3) - \frac{qR^4}{2} \bar{r} \right] 2\pi\bar{r}d\rho\bar{r} \cdot \delta w = 0. \quad (47)$$

Учтем далее, что бесконечно малое возможное перемещение  $\delta w$  представляет собой вариацию переменной  $w = w(r)$ , которую найдем по формуле:

$$\begin{aligned} \delta w &= \frac{\partial w}{\partial r} \delta r = -\frac{4w_0}{R} \left( \frac{r}{R} - \frac{r^3}{R^3} \right) \delta r = \\ &= -4w_0(\bar{r} - \bar{r}^3)\delta\bar{r}, \end{aligned}$$

подставив которую в уравнение (47), приведем его к виду:

$$\int_0^1 \left[ 32Dw_0\bar{r} + \frac{2}{3} \frac{h}{\bar{r}} Ew_0^3 \left( \frac{5-3\mu}{1-\mu} \bar{r} - 6\bar{r}^3 + 4\bar{r}^5 - \bar{r}^7 \right) (\bar{r} - \bar{r}^3) - \frac{qR^4}{2} \bar{r} \right] 2\pi\bar{r}d\bar{r} \cdot [-4w_0(\bar{r} - \bar{r}^3)] \delta\bar{r} = 0.$$

Учитывая, что в полученном уравнении  $\delta\bar{r} \neq 0$  и раскрывая в нем квадратные скобки, получим уравнение:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 32Dw_0\bar{r}(\bar{r} - \bar{r}^3)\bar{r}d\bar{r} - \int_0^1 \frac{qR^4}{2} \bar{r}(\bar{r} - \bar{r}^3)\bar{r}d\bar{r} + \\ &+ \int_0^1 \frac{2}{3} \frac{h}{\bar{r}} Ew_0^3 \left( \frac{5-3\mu}{1-\mu} \bar{r} - 6\bar{r}^3 + 4\bar{r}^5 - \bar{r}^7 \right) \times \\ &(\bar{r} - \bar{r}^3)(\bar{r} - \bar{r}^3)\bar{r}d\bar{r} = 0, \quad (48) \end{aligned}$$

каждый интеграл в котором может быть найден в квадратурах:

$$\begin{aligned} \int_0^1 32Dw_0(\bar{r}^3 - \bar{r}^5)d\bar{r} &= 32Dw_0 \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \frac{\bar{r}^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \\ &= 32Dw_0 \frac{1}{12} = \frac{8}{3} Dw_0, \quad (49) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{qR^4}{2} (\bar{r}^3 - \bar{r}^5)d\bar{r} = \frac{qR^4}{24}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} Ehw_0^3 \int_0^1 \left( \frac{5-3\mu}{1-\mu} \bar{r} - 6\bar{r}^3 + 4\bar{r}^5 - \bar{r}^7 \right) \\ &(\bar{r} - \bar{r}^3)^2 d\bar{r} = \frac{2}{3} Ehw_0^3 \left[ \frac{5-3\mu}{1-\mu} \int_0^1 \bar{r}(\bar{r} - \bar{r}^3)^2 d\bar{r} - \right. \\ &- 6 \int_0^1 \bar{r}^3(\bar{r} - \bar{r}^3)^2 d\bar{r} + 4 \int_0^1 \bar{r}^5(\bar{r} - \bar{r}^3)^2 d\bar{r} - \\ &\left. - \int_0^1 \bar{r}^7(\bar{r} - \bar{r}^3)^2 d\bar{r} \right] = \frac{2}{3} Ehw_0^3 \left( \frac{5-3\mu}{1-\mu} \cdot \frac{1}{24} - \frac{1}{10} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{30} - \frac{1}{210} \right) = \frac{23-9\mu}{252(1-\mu)} Ehw_0^3. \quad (51) \end{aligned}$$

С учетом вычисленных интегралов уравнение (48) представляется в виде:

$$\frac{8}{3} Dw_0 - \frac{qR^4}{24} + \frac{23-9\mu}{252(1-\mu)} Ehw_0^3 = 0,$$

которое после преобразований будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{2(23-9\mu)}{21(1-\mu)} \delta^3 + \frac{16}{3(1-\mu^2)} \delta = \bar{q}, \quad (52)$$

где

$$\bar{q} = \frac{q}{E} \left( \frac{R}{h} \right)^4. \quad (53)$$

Поскольку уравнение (52) является кубическим, то для отыскания его корней воспользуемся математическим программным пакетом MathCAD [18].

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Вычислительные процедуры в статье выполнены при следующих исходных данных:  $R = 1,5$  м;  $h = 0,1R$ ;  $\mu = 0,3$ ;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $q = 2$  МПа.

Определение параметров перемычки начнем с решения уравнения (52), подставим в которое исходные данные, приведем его к виду:

$$2,765 \cdot \delta^3 + 5,861 \cdot \delta = 0,1,$$

и, используя модуль «Given—Find», встроенный в программу MathCAD, находим  $\delta = 0,017$ , а затем реальный прогиб в центре пластины  $w_0 = \delta \cdot h = 2,599$  мм.

После определения  $\delta$  вначале вычисляем по формулам (39), (40) напряжения в срединной поверхности пластины, а затем по формулам (43) и (44) вычисляем напряжения, обусловленные изгибающими моментами. По результатам вычислений построены графики зависимостей напряжений от безразмерной координаты  $\bar{r}$  (рис. 2, рис. 3).

Из анализа графиков на рис. 2 вытекает, что функция  $\sigma_r(r)$  монотонно убывает на

всём рассматриваемом интервале  $\bar{r} \in [0; 1]$ , а ее график представляет собой кривую, имеющую при  $\bar{r} = 0,68$  точку перегиба. При этом на отрезке  $\bar{r} \in [0; 0,68]$  график функции  $\sigma_r(\bar{r})$  слабовыпуклый, а на участке  $\bar{r} \in [0,68; 1]$  — славоогнутый. График функции  $\sigma_\varphi(\bar{r})$  также имеет точку перегиба при  $\bar{r} = 0,52$ , но в отличие от графика  $\sigma_r(r)$  имеет глобальный минимум в точке  $\bar{r} = 0,854$ , равный 0,0633 МПа.

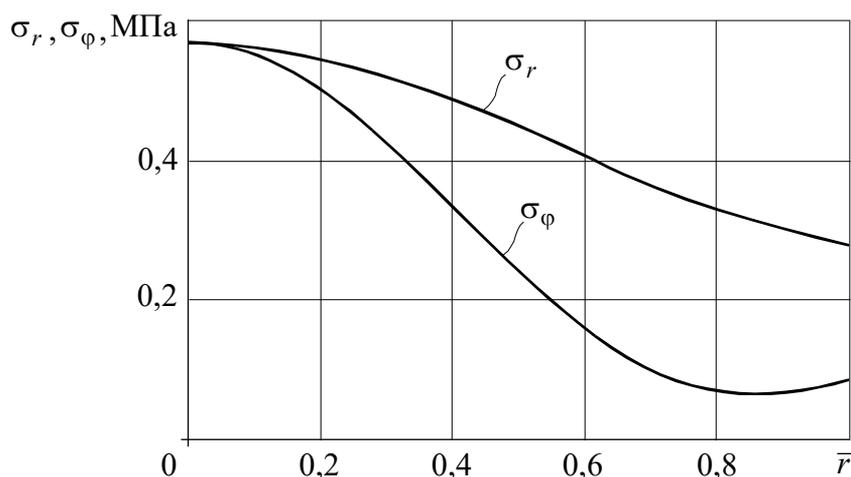


Рис. 2. Зависимость напряжений в срединной поверхности пластины от безразмерной координаты

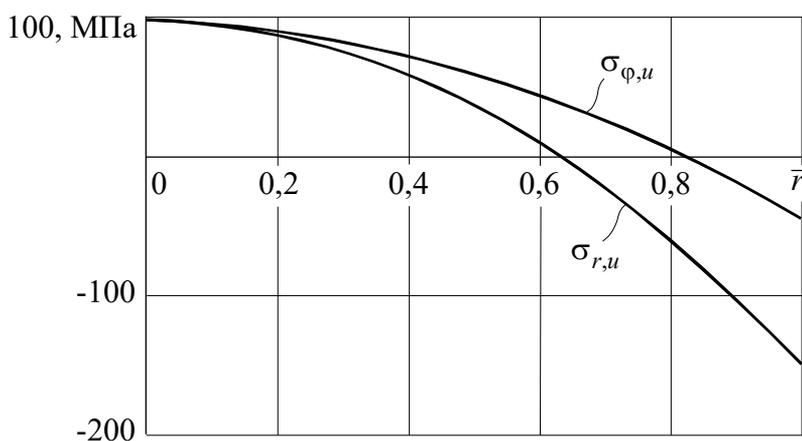


Рис. 3. Зависимость изгибных напряжений в пластине от безразмерной координаты

Функции  $\sigma_{r,u}(\bar{r})$ ,  $\sigma_{\varphi,u}(\bar{r})$  представляют собой монотонно убывающие функции, графики которых являются выпуклыми кривыми на всем рассматриваемом отрезке  $\bar{r} \in [0; 1]$  (рис. 3). Обратим внимание, что обе функции  $\sigma_{r,u}(\bar{r})$ ,  $\sigma_{\varphi,u}(\bar{r})$  являются знакопеременными. При этом функция  $\sigma_{r,u}(\bar{r})$  в точке  $\bar{r} = 0,628$  равна нулю, а функция  $\sigma_{\varphi,u}(\bar{r})$  равна нулю в точке  $\bar{r} = 0,827$ .

Следовательно, напряжения  $\sigma_{r,u}(\bar{r})$  на участке  $\bar{r} \in [0; 0,628]$  являются положительными, а на участке  $\bar{r} \in [0,628; 1]$  — отрицательными. Поскольку в строительной механике принято считать растягивающие напряжения положительными, а сжимающие — отрицательными, то на участке  $\bar{r} \in [0; 0,628]$  напряжения  $\sigma_{r,u}(\bar{r})$  растягивают волокна, обращенные выпуклостью в сторону оси  $z$  (см.

рис. 1), на участке  $\bar{r} \in [0,628;1]$  напряжения  $\sigma_{r,u}(\bar{r})$  растягивают волокна, обращенные выпуклостью противоположно оси  $z$ . Аналогичные рассуждения имеют место и для напряжений  $\sigma_{\varphi,u}(\bar{r})$ .

Обратим внимание, что максимальные напряжения  $\sigma_r, \sigma_\varphi$  в срединной поверхности перемычки составляют всего 0,568 МПа, а максимальные по модулю напряжения от изгиба равны 149,98 МПа. Поэтому напряжениями  $\sigma_r, \sigma_\varphi$  можно пренебречь, по сравнению с изгибными напряжениями  $\sigma_{r,u}, \sigma_{\varphi,u}$  и в дальнейшем их не учитывать.

Далее определим предельно допустимый прогиб  $[w_0]$  в перемычке, полагая, что наибольшие по модулю напряжения в перемычке не должны превышать допускаемых напряжений  $[\sigma]$ . Поскольку наибольшие по модулю напряжения возникают на контуре перемычки, то полагая их равными  $|\delta_{r,u}| = [\delta]$ , найдем из формулы (43) предельно допустимое значение  $[\sigma]$ :

$$[\delta] = \frac{[\sigma](1-\mu^2)}{2E\bar{h}^2|1+\mu-(3+\mu)|}, \quad (54)$$

где принято  $[\sigma] = 160$  МПа.

Подставляя в формулу (54) исходные данные, находим  $[\delta] = 0,018$  и, следовательно,  $[w_0] = [\delta] \cdot h = 2,73$  мм. При больших значениях прогиба наибольшие значения напряжений превысят допускаемые напряжения, что приведет к разрушению перемычки.

С учетом найденного значения  $[\delta]$  из равенства (52) найдем сначала предельно допустимое безразмерное значение внешней нагрузки  $[\bar{q}] = 0,107$ , а затем по формуле (53)

определим ее реальную величину  $[q] = 2,134$  МПа.

Таким образом, при действии на рассматриваемую перемычку внешней нагрузки, превышающей величину 2,134 МПа, может произойти разрушение данной перемычки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований:

- сформулирована нелинейная краевая задача, описывающая осесимметричное деформирование тонкой шахтной перемычки;
- найдены решения краевой задачи, на базе которых построены графики напряжений, возникающих в срединной поверхности перемычки и напряжений, обусловленных ее изгибом, анализ которых показал:

а) при действии внешней нагрузки  $q = 2$  МПа на перемычку радиуса  $R = 1,5$  м толщиной  $h = 0,15$  м максимальные напряжения в срединной поверхности перемычки составляют всего 0,568 МПа, а максимальные по модулю изгибающие напряжения равны 149,98 МПа. Поэтому напряжениями в срединной поверхности можно пренебречь, по сравнению с изгибными напряжениями, и в расчетах их не учитывать;

б) определены положения точек перегиба изогнутой поверхности перемычки, с помощью которых выявлены участки ее выпуклости и вогнутости;

в) для заданных параметров перемычки вычислены предельное значение стрелы прогиба, которое составило 2,73 мм и соответствующее ему предельное значение внешней нагрузки, равное 2,134 МПа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линденау Н.И., Маевская В.М., Крылов В.Ф. Происхождение, профилактика и тушение эндогенных пожаров в угольных шахтах. М., 1977. 320 с.
2. Зыков В.С. О механизме формирования выбросоопасной ситуации в очистном забое угольной шахты // Маркшейдерский вестник. 2016. № 5. С. 44–48.
3. Черданцев С.В., Черданцев Н.В., Ли Х.У., Лебедев К.С., Ли К.Х., Хаймин С.А. Определение параметров суфлярных выделений газа из угольного массива в горные выработки // Вестник научного центра по безопасности работ в угольной промышленности. 2017. № 1. С. 26–33.
4. Черданцев Н.В. Об одном подходе к расчету выброса угля из газоносного пласта, вмещающего геологические нарушения // Безопасность труда в промышленности. 2019. № 8. С. 13–18.

5. Черданцев С.В., Ли Х.У., Филатов Ю.М., Шлапаков П.А. Определение критической температуры зажигания микрогетерогенных пылегазовоздушных смесей в горных выработках // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2018. № 1. С. 117–125.

6. Черданцев С.В., Филатов Ю.М., Шлапаков П.А. Режимы диффузионного горения мелкодисперсных пылегазовоздушных смесей в атмосфере горных выработок // Уголь 2020. № 2. С. 27–32.

7. Fomin V.M., Postinkov B.V., Kolotilov V.A., Shalaev V.S., Shalaev Y.V., Florya N.F. Modeling shock wave processes in a mine opening with permeable barriers // Journal of Mining Science. 2019. Vol. 55. Issue 1. P. 18–22.

8. Черданцев С.В., Филатов Ю.М., Шлапаков П.А. Структура и параметры ударного фронта в вязком теплопроводном газозоудушном потоке горной выработки // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2019. № 10. С. 183–194.

9. Черданцев С. В., Шлапаков П.А., Голоскоков С.И., Ерастов А.Ю., Лебедев К.С., Шлапаков Е.А. О формировании напряженного состояния в шахтной перемычке при прохождении через нее ударной волны // Вестник Научного центра ВостНИИ по промышленной и экологической безопасности. 2023. № 1. С. 47–62.

10. Черданцев С.В., Ерастов А.Ю. Математическое моделирование напряженного состояния в шахтной перемычке, установленной в выработке круглого поперечного сечения // Уголь. 2023. № 2. С. 34–40.

11. Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Ерастов А.Ю., Лебедев К.С. Напряженное состояние в шахтной перемычке, обусловленное давлением на фронте ударной волны // Безопасность труда в промышленности. 2023. № 2. С. 7–14.

12. Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Ерастов А.Ю., Лебедев К.С., Хаймин С.А. Построение модели шахтной перемычки на базе расчетной схемы толстой плиты // Горная промышленность. 2023. № 1. С. 110–116.

13. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., 1966. 636 с.

14. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М., 1956. 420 с.

15. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М., 1974. 176 с.

16. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М., 1975. 526 с.

17. Новожилов В.В. Теория упругости. Л., 1958. 370 с.

18. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. М., 2006. 496 с.

---

**DOI: 10.25558/VOSTNII.2023.23.46.004**

**UDC 622.272:516.02**

**© S.V. Cherdantsev, P.A. Shlapakov, S.A. Khaymin, V.V. Kolykhalov, K.S. Lebedev, 2023**

**S.V. CHERDANTSEV**

Doctor of Engineering Sciences,

Leading Researcher

JSC «NC VostNII», Kemerovo

e-mail: svch01@yandex.ru

**P.A. SHLAPAKOV**

Candidate of Engineering Sciences,

Head of Laboratory  
JSC «NC VostNII», Kemerovo  
e-mail: shlapak1978@mail.ru

**E.A. SHLAPAKOV**  
Researcher  
JSC «NC VostNII», Kemerovo  
e-mail: lairxx@yandex.ru

**S.A. KHAYMIN**  
Senior Research Associate  
JSC «NC VostNII», Kemerovo  
e-mail: hsa007@mail.ru

**V.V. KOLYKHALOV**  
Senior Research Associate  
JSC «NC VostNII», Kemerovo  
e-mail: X77kem@mail.ru

**K.S. LEBEDEV**  
Senior Research Associate  
JSC «NC VostNII», Kemerovo  
e-mail: lebedevks1987@yandex.ru

#### **DEVELOPMENT OF MINE BRIDGE MODEL BASED ON DESIGN DIAGRAM OF THIN FLEXIBLE PLATE**

*The development of coal deposits is accompanied by the release of methane from destroyed coal and the formation of dust and gas-air mixtures predisposed to chemical response, as a result of which deflagration and detonation waves form in the mine atmosphere, which can lead to accidents with catastrophic consequences. In order to prevent the propagation of gas-dynamic and thermophysical processes in the atmosphere of mine workings at coal enterprises, mine bridges are used, for which various structures and technological schemes of erection have been developed. However, reliable methods for calculating jumpers have not yet been created. Recently, a number of works have discussed various options for design schemes of mine bridges, including design schemes of a massive body and a thick plate within the framework of linear elastic theory models. This article discusses the stress state of a shaft bridge made of a thin circular plate. When setting an edge problem, not only the bending of the bridge is taken into account, but also the stretching of its middle surface, due to which the edge problem becomes non-linear, the solution of which is implemented using the semi-reverse method of Saint-Venant. As a result, the components of stresses in the jumper under the action of the static pressure of the shock wave were found. Stress plots were built and some patterns of stress distribution in the shaft bridge were noted.*

Keywords: MINE WORKINGS, MINE BRIDGES, COMPONENTS OF STRESSED-DEFORMED STATE, GENERALIZED HOOKE LAW, EDGE PROBLEM ON BALANCE OF THIN BRIDGE, STRESS FUNCTION, SEMI-REVERSE METHOD OF SAINT-VENAN.

#### **REFERENCES**

1. Lindenau N.I., Mayevskaya V.M., Krylov V.F. Origin, prevention and extinguishing of endogenous fires in coal mines. M., 1977. 320 p. [In Russ.].
2. Zykov V.S. On the mechanism of formation of an explosive situation in the treatment face of a

coal mine // Surveyor's Bulletin [Markshejderskij vestnik]. 2016. No. 5. P. 44–48. [In Russ.].

3. Cherdantsev S.V., Cherdantsev N.V., Li H.U., Lebedev K.S., Li K.H., Khaimin S.A. Determination of parameters of souffle gas emissions from coal massif into mine workings // Bulletin of the Scientific Center for the safety of work in the coal industry [Vestnik Nauchnogo centra po bezopasnosti rabot v ugolnoj promyshlennosti]. 2017. No. 1. P. 26–33. [In Russ.].

4. Cherdantsev N.V. On one approach to the calculation of coal emissions from a gas-bearing reservoir containing geological disturbances // Occupational safety in industry [Bezopasnost truda v promyshlennosti]. 2019. No. 8. P. 13–18. [In Russ.].

5. Cherdantsev S.V., Li H.U., Filatov Yu.M., Shlapakov P.A. Determination of the critical ignition temperature of microheterogenic dust-gas-air mixtures in mine workings // Mining information and Analytical Bulletin (scientific and technical journal) [Gornyj informacionno-analiticheskij byulleten (nauchno-tekhnicheskij zhurnal)]. 2018. No. 1. P. 117–125. [In Russ.].

6. Cherdantsev S.V., Filatov Yu.M., Shlapakov P.A. Modes of diffusion gorenje fine dust-gas-air mixtures in the atmosphere of mining workings // Coal [Ugol]. 2020. No. 2. P. 27–32. [In Russ.].

7. Fomin V.M., Postinkov B.V., Kolotilov V.A., Shalaev V.S., Shalaev Y.V., Florya N.F. Modeling shock wave processes in a mine opening with permeable barriers // Journal of Mining Science. 2019. Vol. 55. Issue 1. P. 18–22.

8. Cherdantsev S.V., Filatov Yu.M., Shlapakov P.A. Structure and parameters of the shock front in a viscous heat-conducting gas-air flow of mining // Mining information and Analytical Bulletin (scientific and technical journal) [Gornyj informacionno-analiticheskij byulleten (nauchno-tekhnicheskij zhurnal)]. 2019. No 10. P. 183–194. [In Russ.].

9. Cherdantsev S. V., Shlapakov P.A., Goloskokov S.I., Erastov A.Yu., Lebedev K.S., Shlapakov E.A. On the formation of a stressed state in a shaft bridge when a shock wave passes through it // Bulletin of the VostNII Scientific Center for Industrial and Environmental Safety [Vestnik Nauchnogo centra VostNII po promyshlennoj i ekologicheskoj bezopasnosti]. 2023. No. 1. P. 47–62. [In Russ.].

10. Cherdantsev S.V., Erastov A.Yu. Mathematical modeling of the stress state in the shaft bridge installed in the development of a circular cross section // Coal [Ugol]. 2023. No. 2. P. 34–40. [In Russ.].

11. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Erastov A.Yu., Lebedev K.S. The stress state in the shaft bridge caused by pressure at the shock wave front // Occupational safety in industry [Bezopasnost truda v promyshlennosti]. 2023. No. 2. P. 7–14. [In Russ.].

12. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Erastov A.Yu., Lebedev K.S., Khaimin S.A. Constructing a model of a mine bridge based on a calculation scheme of a thick plate // Mining Industry [Gornaya promyshlennost]. 2023. No. 1. P. 110–116. [In Russ.].

13. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. Plates and shells. M., 1966. 636 p.

14. Volmir A.S. Flexible plates and shells. M., 1956. 420 p. [In Russ.].

15. Pogorelov A.V. Differential geometry. M., 1974. 176 p. [In Russ.].

16. Koltunov M.A., Vasiliev Yu.N., Chernykh V.A. Elasticity and strength of cylindrical bodies. M., 1975. 526 p. [In Russ.].

17. Novozhilov V.V. Theory of elasticity. L., 1958. 370 p. [In Russ.].

18. Alekseev E.R., Chesnokova O.V. Solving computational mathematics problems in Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. M., 2006. 496 p. [In Russ.].