

DOI: 10.25558/VOSTNII.2024.10.48.005

УДК 622.272:516.02

© С. В. Черданцев, П. А. Шлапаков, В. В. Колыхалов, Е. А. Шлапаков,
С. А. Хаймин, К. С. Лебедев, А. Ю. Ерастов, 2024

С. В. ЧЕРДАНЦЕВ

д-р техн. наук,
главный научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: svch01@yandex.ru



П. А. ШЛАПАКОВ

канд. техн. наук,
заведующий лабораторией
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: shlapak1978@mail.ru



В. В. КОЛЫХАЛОВ

старший научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: X77kem@mail.ru



Е. А. ШЛАПАКОВ

научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: lairxx@yandex.ru



С. А. ХАЙМИН

старший научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: hsa007@mail.ru



К. С. ЛЕБЕДЕВ

старший научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: lebedevks1987@yandex.ru



А. Ю. ЕРАСТОВ

старший научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: eractov_a_y@mail.ru



ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗОВОЗДУШНОЙ СМЕСИ В УГОЛЬНОМ ПЛАСТЕ С ПОМОЩЬЮ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье обсуждается задача о фильтрации газозвушной смеси через пологий угольный пласт при его отработке длинными столбами по простиранию. В этом случае возникают «прососы» воздуха через угольный пласт, обусловленные существенным различием давления рудничного воздуха в откаточной и вентиляционной выработках. С теоретической точки зрения, такая задача еще не рассматривалась, что обуславливает ее актуальность. На базе фундаментальных понятий и допущений геомеханики и газовой динамики в статье сформулирована одномерная задача математической физики с начальными условиями, описывающая нестационарную фильтрацию воздуха через угольный пласт. С помощью преобразований, основанных на групповом анализе дифференциальных уравнений, рассматриваемая задача сведена к автономной задаче, построено ее решение в квадратурах. Анализ решения позволил выявить некоторые закономерности протекания фильтрационного процесса в угольном пласте.

Ключевые слова: ГОРНЫЕ ВЫРАБОТКИ, НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ, ПРОНИЦАЕМОСТЬ УГОЛЬНОГО ПЛАСТА, ВЯЗКОСТЬ ГАЗА, ФОРМУЛА ДАРСИ, УРАВНЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА.

ВВЕДЕНИЕ

Большинство разрабатываемых в Кузбассе угольных пластов подземным способом предрасположены при определенных условиях к возникновению очагов самонагревания и самовозгорания, которые образуются как в скоплениях пыли, осевших в выработанных пространствах, так и в отработываемых угольных пластах [1, 2]. Как известно, процесс самонагревания угля обусловлен, с одной стороны, экзогенной химической реакцией окисления угля, а с другой стороны, обусловлен теплофизическими и фильтрационными процессами [3].

Фильтрационные процессы являются основными физическими процессами при формировании и разработке нефтегазовых и газоконденсатных месторождений, а также играют важную роль при образовании очагов самовозгорания угля и формировании выбросоопасных зон угля и газа в угольных пластах.

Несмотря на то, что теория фильтрации к настоящему времени достаточно хорошо развита и базируется на многочисленных экспериментальных данных о фильтрационных свойствах пористых сред, работы в этой

области продолжают регулярно появляться в отечественных и зарубежных журналах, что существенно развивает классические представления о теории фильтрации. Ниже мы кратко рассмотрим некоторые наиболее важные, на наш взгляд, работы, посвященные фильтрационным процессам.

Так, в работе [4] рассмотрены основные факторы, влияющие на формирование проницаемости угольных пластов в условиях естественного залегания при изменении напряженно-деформированного состояния массива, связанного с ведением горных работ.

В работе [5] рассмотрены результаты фильтрационных экспериментов на образцах различных горных пород, на основании которых выявлены особенности фильтрационного массопереноса, связанные с сорбцией газа в образцах, что позволяет определить проницаемость пористых материалов с использованием закономерностей нестационарной фильтрации.

В статье [6] приводятся уравнения Максвелла для двухкомпонентного слоистого материала с периодической структурой в поле

гармонического по времени источника, действующего вдоль слоев. Обсуждается двухмасштабная гомогенизация уравнений с учетом комплексной проводимости межфазных слоев и их толщины. Краевая задача для систем дифференциальных уравнений с краевыми условиями сводится к задаче в слабой вариационной формулировке.

Исходя из законов сохранения и принципов термодинамики в работе [7] предложена математическая модель течения двухфазной гранулированной жидкости, одной из фаз которой является вязкопластическая гранулированная жидкость Бингама, а другой — вязкая ньютоновская жидкость. Найден критерий инициации движения гранулированной фазы в пористой среде. Установлено, что в зависимости от предельного напряжения сдвига такая фаза не течёт, если малым является либо градиент давления, либо толщина канала. Выявлены факторы, замедляющие проникающее движение твёрдой фазы в пористую среду.

В статье [8] рассматривается течение плотных взвесей частиц в рамках двухскоростного континуума, термодинамика которого разработана на базе работ Ландау и Халатникова, а уравнения массопереноса получены из обобщенного закон Фика — Нернста для вектора потока массовой концентрации частиц. В качестве приложения рассмотрена проблема конвективного осаждения и показано, что усиленное осаждение происходит в наклонном сосуде из-за вихрей.

В работе [9] приводятся анализ результатов численного решения уравнений фильтрации сильно смешиваемых жидкостей, полученных на основе двухмасштабной гомогенизации уравнений Навье — Стокса и Канна — Хиллиарда. Показано, что в общем случае тензор проницаемости является анизотропным. Для одномерных течений исследована динамика смешиваемости и показано, что вытеснение одной фазы путем закачки другой фазы может происходить даже при отсутствии перепада давления в образце.

Авторы данной статьи рассматривают нестационарную задачу о фильтрационном процессе в угольном пласте при его отработке

длинными столбами по простиранию. При такой системе разработки свежий и отработанный воздушные потоки движутся соответственно по откаточной и вентиляционной выработкам в противоположных направлениях. Кроме этого, давление в свежем и в отработанном воздушных потоках различны. Разность давления порождает, так называемые, «прососы» воздуха через угольный целик вследствие фильтрации в трещиноватом и пористом угольном массиве, что обуславливает активизацию процессов окисления и сушки угля. К пониманию этого обстоятельства горняки пришли уже сравнительно давно, однако теоретическое описание «прососов» воздуха в угольных пластах еще не обсуждалось.

Поэтому постановка, решение и анализ математической модели фильтрационного процесса в угольных пластах, на наш взгляд, является актуальной задачей.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ФИЛЬТРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ В ОТРАБАТЫВАЕМОМ УГОЛЬНОМ ПЛАСТЕ

Для описания фильтрационного процесса, в первую очередь, воспользуемся законом Дарси, связывающим между собой скорость фильтрации \vec{v} и градиент давления [3, 10, 11]:

$$\vec{v} = -\lambda \nabla p, \quad (1)$$

где ∇ — является оператором Гамильтона [12, 13].

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

а λ — коэффициент фильтрации газозвушной смеси через пористую среду.

К уравнению (1) добавим уравнение неразрывности для действительного потока газозвушной смеси в угольном пласте [10]:

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_d \vec{v}_d) = 0, \quad (2)$$

где действительные плотность ρ_d и скорость \vec{v}_d смеси связаны с ее плотностью ρ , скоростью \vec{v} и пористостью m угольного пласта зависимостями [10]:

$$\rho_d = \rho \cdot m, \quad \vec{v}_d = \frac{\vec{v}}{m}. \quad (3)$$

Обратим внимание, что коэффициент фильтрации λ характеризует одновременно свойства и пористой среды, и газа. Поэтому в ходе исследования фильтрации удобно разделить влияние пористой среды и влияние газа. Так, влияние пористой среды будем оценивать коэффициентом проницаемости k , а влияние газа — коэффициентом его динамической вязкости μ . При этом коэффициент фильтрации прямо пропорционален коэффициенту проницаемости и обратно пропорционален коэффициенту динамической вязкости [10, 11]:

$$\lambda = \frac{k}{\mu},$$

в силу чего закон Дарси (1) представляется в виде:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p. \quad (4)$$

В силу формул (3) и (4), уравнение (2) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\rho \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = 0, \quad (5)$$

содержащему неизвестные плотность ρ и давление p . Поэтому к уравнению (5) необходимо добавить соотношение, связывающее ρ и p .

Будем полагать, что в массиве горных пород отсутствуют источники выделения или поглощения теплоты, поэтому процесс фильтрации газовой смеси через угольный пласт можно считать изотермическим, а смесь баротропной, плотность и вязкость которой зависят только от давления:

$$\rho = \rho(p), \quad \mu = \mu(p). \quad (6)$$

Предположим далее, что газозаполненная смесь является упругой, в связи с чем, между

давлением и плотностью имеет место соотношение [10]:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{K_\Gamma}, \quad (7)$$

где K_Γ — модуль объемной упругости газозаполненной смеси, который составляет $K_\Gamma = 1,4 \times 10^5$ Па. Интегрируя равенство (7), имеем:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{K_\Gamma},$$

откуда вытекает следующее соотношение между плотностью и давлением:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{p - p_0}{K_\Gamma}\right), \quad (8)$$

где ρ_0 — плотность газозаполненной смеси при некотором статическом давлении p_0 .

Полученную функцию (8) удобнее представить в более простой форме, разложив ее в ряд Тейлора [13] в окрестности точки $p = p_0$:

$$\rho_0 \exp\left(\frac{p - p_0}{K_\Gamma}\right) = \rho_0 \left[1 + \frac{p - p_0}{K_\Gamma} + \frac{1}{2} \left(\frac{p - p_0}{K_\Gamma}\right)^2 + \dots \right]. \quad (9)$$

Ограничившись только двумя первыми членами ряда (9), получим формулу:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{K_\Gamma} \right), \quad (10)$$

показывающую линейную зависимость между плотностью и давлением.

Пусть пористость и давление также связаны друг с другом линейно [10]:

$$m = m_0 + \frac{p - p_0}{K_\Pi}, \quad (11)$$

где m_0 — пористость при давлении p_0 ; K_Π — модуль упругости угольного пласта, который связан с модулем Юнга E минерального скелета угля следующей зависимостью [11]:

$$K_\Pi = E(1 - m_0). \quad (12)$$

Используя формулы (10) и (11), приходим к следующей формуле для определения пористости угольного пласта:

$$m\rho = \left(m_0 + \frac{p-p_0}{K_{\Pi}}\right)\rho_0 \left(1 + \frac{p-p_0}{K_{\Gamma}}\right) =$$

$$= m_0\rho_0 \left[1 + (p-p_0) \left(\frac{m_0 K_{\Pi} + K_{\Gamma}}{m_0 K_{\Pi} K_{\Gamma}}\right) \left(1 + \frac{p-p_0}{m_0 K_{\Pi} + K_{\Gamma}}\right)\right]. \quad (13)$$

Ввиду малости слагаемого:

$$\frac{p-p_0}{m_0 K_{\Pi} + K_{\Gamma}} \ll 1,$$

и возможностью им пренебречь по сравнению с единицей, формула (13) приобретает вид:

$$m\rho = m_0\rho_0 \left[1 + (p-p_0) \left(\frac{m_0 K_{\Pi} + K_{\Gamma}}{m_0 K_{\Pi} K_{\Gamma}}\right)\right],$$

откуда вытекает формула:

$$m\rho = m_0\rho_0 + m_0\rho_0 \frac{p-p_0}{K}, \quad (14)$$

где K — является приведенным модулем упругости:

$$K = \frac{m_0 K_{\Pi} K_{\Gamma}}{m_0 K_{\Pi} + K_{\Gamma}} = \frac{K_{\Gamma}}{1 + \frac{K_{\Gamma}}{m_0 K_{\Pi}}}, \quad (15)$$

который учитывает упругие свойства как угольного пласта, так и газозадушной смеси.

Подставляя формулу (14) в (5) и полагая, что проницаемость угольного пласта и вязкость газозадушной смеси являются постоянными величинами, приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \omega^2 \nabla^2 p = 0, \quad (16)$$

принадлежащему классу уравнений параболического типа [12] для трехмерной области, в котором параметр ω представляется в виде:

$$\omega = \sqrt{\frac{k \cdot K}{m_0 \cdot \mu}}, \quad (17)$$

Отрабатываемый угольный пласт является, вообще говоря, неоднородной и анизотропной средой, в связи с чем, коэффициенты пористости и проницаемости пласта являются функциями координат, что вызывает

серьезные затруднения при отыскании решения уравнения (16). Поэтому, в этой статье мы примем следующие допущения:

1) угольный пласт является однородным изотропным телом, в связи с чем, фильтрационные коэффициенты и проницаемость будем считать постоянными;

2) поскольку мощность угольного пласта h существенно меньше размеров обрабатываемой лавы, то будем полагать, что параметры угольного пласта не зависят от h ;

3) полагаем, что искомые параметры фильтрации изменяются только в направлении параллельном длине лавы. Изменением параметров вдоль других направлений пренебрегаем.

Учитывая принятые допущения, мы можем рассмотреть вместо угольного пласта только достаточно узкую угольную «полоску», длина которой равна длине лавы L , высота равна мощности угольного пласта h , а толщина равна единице (рис. 1). В силу сказанного, уравнение (16) приводится к виду:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \omega^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad (18)$$

Искомое давление p должно удовлетворять начальному и граничным условиям в рассматриваемой области $x \in [0; L]$. Согласно начальному условию искомое давление в начальный момент времени является некоторой функцией $\varphi(x)$:

$$p|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0; L], \quad (19)$$

которую примем в следующем виде:

$$\varphi(x) = p_1 - (p_1 - p_2) \left(\frac{x}{L}\right)^2, \quad x \in [0; L]. \quad (20)$$

Граничные условия требуют, чтобы искомое давление p было известно в граничных точках в любой момент времени:

$$p|_{x=0} = p_1, \quad p|_{x=L} = p_2, \quad \text{при любом } t, \quad (21)$$

где p_1, p_2 — давление соответственно во входящей и исходящей воздушных потоках.

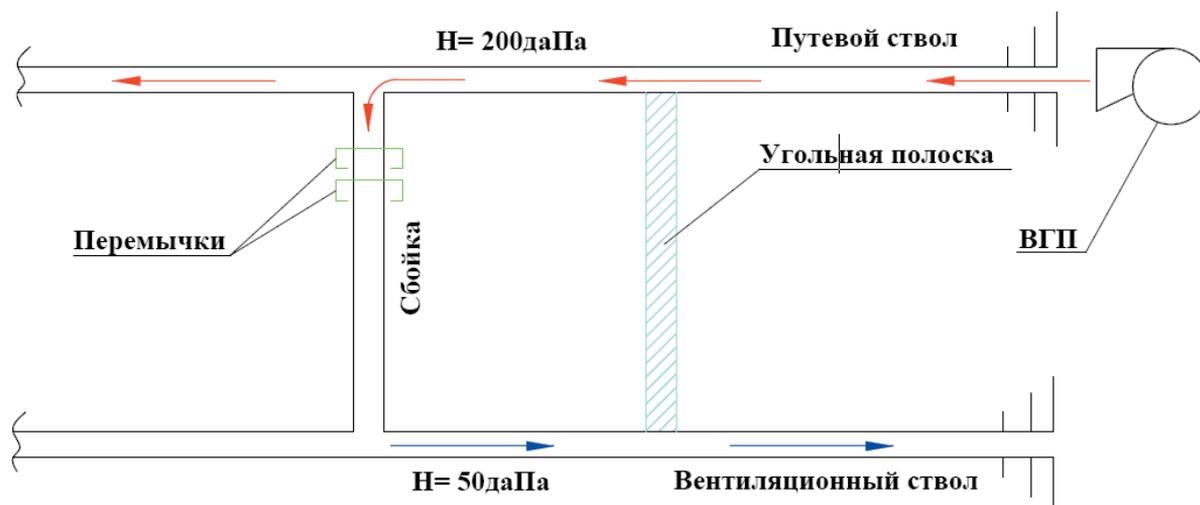


Рис. 1. Схема отработки угольного пласта длинными столбами по простиранию

Уравнение (18), начальное условие (19) и граничные условия (21) образуют начально-краевую задачу смешанного типа, для отыскания решения которой существуют различные методы. Наиболее распространенным является метод разделения переменных [12], когда искомая функция $p(x, t)$ представляется в виде произведения двух функций, одна из которых $p(x)$ зависит только от координаты, а другая $p(t)$ — только от времени

$$p(x, t) = p(x) \cdot p(t). \quad (22)$$

После подстановки (22) в уравнение (18) и выполнения ряда преобразований уравнение (18) приводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых, как правило, выражаются через специальные функции, в связи с чем, возникают сложности с оценкой сходимости полученных решений.

Еще один способ построения решения задачи (18) — (21) базируется на теории группового анализа дифференциальных уравнений [14, 15]. Эта теория дает алгоритмы выявления в полном объеме свойства инвариантности любых дифференциальных уравнений. Использование этого свойства позволяет отыскать классы частных решений путем упрощения исходных уравнений за счет уменьшения в них числа независимых переменных.

Основой группового анализа является свойство какой-либо системы оставаться инвариантной при некоторых преобразованиях всех участвующих в системе переменных. Если единственным инвариантным характеристическим свойством преобразований является коммутативность, то их относят к группам растяжений, и называют автомодельными [14, 15].

Общее представление автомодельного решения применительно к уравнению (18) имеет следующий вид [14, 15]:

$$\xi = x^\alpha t^\beta. \quad (23)$$

где α, β — постоянные коэффициенты, называемые показателями автомодельности, подлежащие определению.

Для определения коэффициентов α, β выполним следующие процедуры. Вначале найдем соотношения между производными по «старым» и «новой» переменным:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 &= (\alpha x^{\alpha-1} t^\beta)^2 = \alpha^2 x^{2\alpha-2} t^{2\beta}, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot t^\beta)}{\partial x} = \alpha t^\beta \frac{\partial(x^{\alpha-1})}{\partial x} = \\ &= \alpha t^\beta (\alpha-1) x^{(\alpha-1)-1} = \alpha(\alpha-1) t^\beta x^{\alpha-2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial (x^\alpha t^\beta)}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot x^\alpha \cdot \beta \cdot t^{\beta-1},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial (x^\alpha t^\beta)}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot t^\beta,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \\ &= \left[\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \cdot \alpha^2 x^{2\alpha-2} t^{2\beta} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \alpha (\alpha-1) t^\beta x^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Далее найденные производные подставляем в исходное уравнение (18):

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} x^\alpha \beta t^{\beta-1} - \omega^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \alpha^2 x^{2\alpha-2} t^{2\beta} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \alpha (\alpha-1) t^\beta x^{\alpha-2} \right) = 0,$$

после сокращения которого на выражение $x^{2\alpha-2} t^{2\beta}$ приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} \beta x^{-\alpha+2} t^{-\beta-1} - \omega^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \alpha^2 + \frac{\partial p}{\partial \xi} \alpha (\alpha-1) x^{-\alpha} t^{-\beta} \right) = 0. \quad (24)$$

Приняв в уравнении (24) следующие соотношения:

$$-\alpha + 2 = k\alpha, \quad -\beta - 1 = k\beta, \quad (25)$$

перепишем его следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \beta \cdot x^{k\alpha} \cdot t^{k\beta} - \omega^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \cdot \alpha^2 + \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \xi^{-1} \right) = 0. \quad (26)$$

Из соотношений (25) вытекает равенство:

$$\alpha = -2\beta, \quad (27)$$

приняв в котором $\alpha = 1$, мы существенно упростим уравнение (26), поскольку второе слагаемое в круглых скобках будет равно нулю. Но тогда из равенства (27) вытекает,

что $\beta = -1/2$, а из (25) получаем $k = 1$. В силу сказанного, формула (23) приобретает вид:

$$\xi = x \cdot t^{-1/2}, \quad (28)$$

а уравнение (26) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 p(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2\omega^2} \frac{dp(\xi)}{d\xi} = 0, \quad (29)$$

которое с помощью подстановки:

$$\psi(\xi) = \frac{dp(\xi)}{d\xi} \quad (30)$$

приведем к уравнению первого порядка:

$$\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} = -\frac{\xi}{2\omega^2} \psi(\xi). \quad (31)$$

Разделив в (31) переменные и интегрируя его:

$$\int \frac{d\psi(\xi)}{\psi(\xi)} = -\int \frac{\xi}{2\omega^2} d\xi + \ln C_1,$$

приходим к следующему равенству:

$$\ln \psi(\xi) - \ln C_1 = -\frac{\xi^2}{4\omega^2},$$

откуда находим функцию $\psi(\xi)$:

$$\psi(\xi) = C_1 \cdot e^{-\left(\frac{\xi}{2\omega}\right)^2}. \quad (32)$$

Найденную функцию $\psi(\xi)$ подставляем в (30):

$$C_1 \cdot e^{-\left(\frac{\xi}{2\omega}\right)^2} = \frac{dp(\xi)}{d\xi}$$

и интегрируя полученное уравнение, имеем:

$$p(\xi) = C_1 \cdot \int e^{-\left(\frac{\xi}{2\omega}\right)^2} d\xi + C_2. \quad (33)$$

В интеграле (33) удобно перейти к переменной δ , связанной с переменной ξ следующим образом:

$$\delta = \frac{\xi}{2\omega}, \quad \delta = \frac{\xi}{2\omega}, \quad (34)$$

в связи с чем, формула (33) представляется в следующем виде:

$$p(\xi) = 2\omega C_1 \int e^{-\delta^2} d\delta + C_2. \quad (35)$$

Неопределенный интеграл в (35) можно заменить интегралом с переменным верхним пределом:

$$\int e^{-\delta^2} d\delta = \int_0^{\delta} e^{-\tau^2} d\tau, \quad (36)$$

представляющим собой функцию Лапласа:

$$\Phi(\delta) = \int_0^{\delta} e^{-\tau^2} d\tau, \quad (37)$$

где величина δ определена в (34). Обратим внимание, что значения функции Лапласа $\Phi(\delta)$ табулированы и приведены в справочниках по математике. Отметим также, что если верхний предел $\delta \rightarrow \infty$, то интеграл (37) превращается в интеграл Пуассона:

$$\Phi(\infty) = \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (38)$$

В силу сказанного и с учетом формулы (28) общее решение (35) представляется в виде:

$$p(\xi) = 2\omega \cdot C_1 \cdot \Phi(\delta) + C_2. \quad (39)$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальным условием (19) и граничным условием (21), в силу которых, получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} p_1 - (p_1 - p_2) \left(\frac{x}{L}\right)^2 = 2\omega \cdot C_1 \cdot \Phi(\infty) + C_2, \\ p_1 = 2\omega \cdot C_1 \cdot \Phi(0) + C_2, \end{cases}$$

из которой, учитывая, что функция Лапласа $\Phi(0) = 0$, а $\Phi(\infty)$ является интегралом Пуассона (38), находим:

$$C_1 = -\frac{p_1 - p_2}{\omega \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2, \quad C_2 = p_1.$$

Найденные постоянные C_1, C_2 подставляем в (39) и получаем формулу для определения давления газовой смеси в угольном пласте:

$$p(\xi) = p_1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot (p_1 - p_2) \left(\frac{x}{L}\right)^2 \cdot \Phi(\delta),$$

с учетом которой закон Дарси (4) для одномерной задачи представляется в следующем виде:

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p[\xi(x,t)]}{\partial x} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[p_1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot (p_1 - p_2) \left(\frac{x}{L}\right)^2 \cdot \Phi(\delta) \right]. \quad (40)$$

Выполнив в выражении (40) процедуру дифференцирования и упростив полученное выражение, приходим к следующей формуле для вычисления скорости фильтрации:

$$v = \frac{2k}{\mu\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(p_1 - p_2)x}{L^2} \left(2\Phi(\delta) + \delta \cdot e^{-\delta^2} \right), \quad (41)$$

где функцию Лапласа $\Phi(\delta)$, определяем по формуле (37), а ее аргумент δ определяем по первой формуле (34) с учетом (28):

$$\delta = \frac{x}{2\omega \cdot \sqrt{t}}. \quad (42)$$

Используя формулы (41), (42), (17), в статье выполнены вычислительные процедуры, на базе которых построены графики функции $v(t)$, характеризующие изменение скорости фильтрации газовой смеси в угольном пласте от времени (рис. 2).

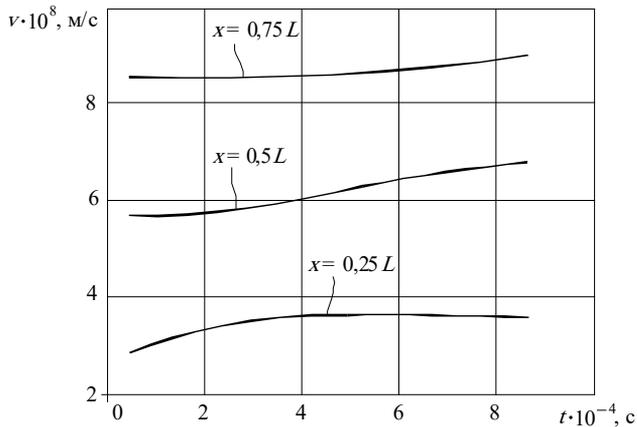


Рис. 2. Графики зависимости скорости фильтрации газовой смеси от времени в различных точках угольного пласта

В качестве исходных данных приняты следующие:

$$m_0 = 0,1; \rho = 10 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, k = 5,6 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2; \\ \mu = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}; K_r = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Па}; E = 4,75 \cdot 10^9 \text{ Па}.$$

Из анализа графиков функции $v(t)$ вытекает, что с течением времени скорость фильтрации газовой смеси увеличивается. Отметим, что в более удаленных от путевой выработки точках пласта скорость фильтрации существенно выше, по сравнению с фильтрацией в близлежащих к путевой выработке точках.

Отметим, что вид графиков существенно изменяется в зависимости от положения

точек в угольном пласте. Так, в точках, расположенных на расстоянии $0,25L$ от путевой выработки, график функции $v(t)$ представляет собой выпуклую кривую. В точках пласта на расстоянии $0,5L$ график функции $v(t)$ имеет как выпуклость, так и вогнутость. И, наконец, в точках пласта на расстоянии $0,75L$ график $v(t)$ является вогнутой кривой на всем рассматриваемом интервале.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

— сформулирована краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных параболического типа, описывающая нестационарную фильтрацию газовой смеси через угольный пласт между откаточной и вентиляционной выработками;

— с помощью группового анализа уравнение в частных производных преобразовано в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого найдено в квадратурах;

— на базе полученного решения выполнены вычислительные процедуры и построены графики, характеризующие фильтрационный процесс газовой смеси в угольном пласте. Анализ графиков показал, что с течением времени скорость фильтрации газовой смеси увеличивается. При этом, по мере удаления от путевой выработки скорость фильтрации смеси возрастает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлапаков П. А., Ерастов А. Ю., Хаймин С. А., Лебедев К. С., Колыхалов В. В., Шлапаков Е. А. Эндогенная пожаробезопасность на угольных предприятиях Кузбасса // Вестник Научного центра ВостНИИ по промышленной и экологической безопасности. 2019. № 1. С. 14–21.
2. Un L. K., Cherdantsev S. V., Popov V. B., Shlapakov P. A., Erastov A. Yu. Electrical Prospecting to Detect Places of Spontaneous Heating in Olzherasskaya-Novaya Coal // Journal of Mining Science. 2017. Vol. 53. P. 191–196.
3. Христианович С. А. Об основах теории фильтрации // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1991. № 1. С. 3–18.
4. Zakharov V. N., Malinnikova O. N., Trofimov V. A., Filippov Y. A. Effect of Gas Content and Actual Stresses on Coalbed Permeability // Journal of Mining Science. 2016. Vol. 2. No. 2. P. 218–225.
5. Аверин А. П., Белоусов Ф. С., Пашичев Б. Н., Трофимов В. А. Закономерности фильтрации газа через образец горной породы // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2021. № 10. С. 100–111.

6. Amirat Y. Shelukhin V. V. Homogenization of Harmonic Maxwell Equations with Allowance for Interfacial Surface Currents: Layered Structure // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2019. Vol. 60. P. 593–607.

7. Shelukhin V. V., Kontorovich A. E. Behavior of Viscoplastic Rocks near Fractures: Mathematical Modeling // Doklady Physics. 2019. Vol. 64. P. 461–465.

8. Shelukhin V. V., Neverov V. V. Dense suspension flows: a mathematical model consistent with thermodynamics // Journal of fluids engineering, transactions of the American society of mechanical engineers. 2022. Vol. 2. P. 314–322.

9. Шелухин В. В., Крутько В. В., Трусов К. В. Фильтрация сильно смешиваемых жидкостей на основе двухмасштабной гомогенизации уравнений Навье – Стокса и Кана – Хиллиарда // Прикладная механика и техническая физика. 2023. № 3. С. 161–173.

10. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., 1963. 397 с.

11. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М., 1984. 211 с.

12. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970. 712 с.

13. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. 11-е изд., стер. СПб., 2005. 736 с.

14. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978. 399 с.

15. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., 1977. 440 с.

DOI: 10.25558/VOSTNII.2024.10.48.005

UDC 622.272:516.02

© S. V. Cherdantsev, P. A. Shlapakov, V. V. Kolykhalov, E. A. Shlapakov, S. A. Khaymin, K. S. Lebedev, A. Y. Erastov, 2024

S. V. CHERDANTSEV

Doctor of Engineering Sciences,
Chief Researcher
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: svch01@yandex.ru

P. A. SHLAPAKOV

Candidate of Engineering Sciences,
Head of Laboratory
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: shlapak1978@mail.ru

V. V. KOLYKHALOV

Senior Research Associate
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: X77kem@mail.ru

E. A. SHLAPAKOV

Researcher
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: lairxx@yandex.ru

S. A. KHAYMIN

Senior Research Associate
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: hsa007@mail.ru

K. S. LEBEDEV

Senior Research Associate
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: lebedevks1987@yandex.ru

A. Yu. ERASTOV

Senior Research Associate
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: erastov_a_y@mail.ru

CONSTRUCTION OF SOLUTION FOR GAS-AIR MIXTURE FILTRATION IN COAL FORMATION USING GROUP ANALYSIS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

The article discusses the problem of filtering the gas-air mixture through a gentle coal seam when it is worked out by long columns along the strike. In this case, «suction» of air through the coal seam occurs due to a significant difference in the pressure of mine air in the exhaust and ventilation passages. From a theoretical point of view, such a task has not yet been considered, which determines its relevance. On the basis of fundamental concepts and assumptions of geomechanics and gas dynamics, the article formulated a one-dimensional problem of mathematical physics with initial conditions, describing non-stationary air filtration through a coal seam. Using transformations based on group analysis of differential equations, the problem under consideration is reduced to an automodel problem, its solution is built in quadratures. Analysis of the solution revealed some regularities of the seepage process in the coal seam.

Keywords: MINE WORKINGS, NON-STATIONARY FILTRATION, COAL BED PERMEABILITY, GAS VISCOSITY, DARCY FORMULA, PARABOLIC EQUATION, GROUP ANALYSIS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, AUTO-MODEL PROBLEM.

REFERENCES

1. Shlapakov P. A., Erastov A. Yu., Khaimin S. A., Lebedev K. S., Kolykhalov V. V., Shlapakov E. A. Endogenous fire safety at Kuzbass coal enterprises // Bulletin of the VostNII Scientific Center for Industrial and Environmental Safety [Vestnik Nauchnogo tsentra VostNII po promyshlennoy i ekologicheskoy bezopasnosti]. 2019. No. 1. P. 14–21. [In Russ.].
2. Un L. K., Cherdantsev S. V., Popov V. B., Shlapakov P. A., Erastov A. Yu. Electrical Prospecting to Detect Places of Spontaneous Heating in Olzherasskaya-Novaya Coal // Journal of Mining Science. 2017. Vol. 53. P. 191–196.
3. Khristianovich S. A. On the basics of filtration theory // Physico-technical problems of mining [Fiziko-tekhnicheskiye problemy razrabotki poleznykh iskopayemykh]. 1991. No. 1. P. 3–18. [In Russ.].
4. Zakharov V. N., Malinnikova O. N., Trofimov V. A., Filippov Y. A. Effect of Gas Content and Actual Stresses on Coalbed Permeability // Journal of Mining Science. 2016. Vol. 2. No. 2. P. 218–225.
5. Аверин А. П., Белоусов Ф. С., Пашичев Б. Н., Трофимов В. А. Закономерности фильтрации газа через образец горной породы // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2021. № 10. С. 100–111. [In Russ.].
6. Amirat Y., Shelukhin V. V. Homogenization of Harmonic Maxwell Equations with Allowance for Interfacial Surface Currents: Layered Structure // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2019. Vol. 60. P. 593–607.
7. Shelukhin V. V., Kontorovich A. E. Behavior of Viscoplastic Rocks near Fractures: Mathematical Modeling // Doklady Physics. 2019. Vol. 64. P. 461–465.
8. Shelukhin V. V., Neverov V. V. Dense suspension flows: a mathematical model consistent with thermodynamics // Journal of fluids engineering, transactions of the American society of mechanical engineers. 2022. Vol. 2. P. 314–322.
9. Shelukhin V. V., Krutko V. V., Trusov K. V. Filtration of highly miscible liquids based on two-scale homogenization of the Navier–Stokes and Kahn–Hilliard equations // Applied mechanics and technical physics [Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika]. 2023. No. 3. P. 161–173. [In Russ.].
10. Charny I. A. Underground hydrogas dynamics. M., 1963. 397 p. [In Russ.].
11. Barenblatt G. I., Kolesnikov V. M., Ryzhik V. M. Movement of liquids and gases in natural formations. M., 1984. 211 p. [In Russ.].
12. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. Partial differential equations of mathematical physics. M., 1970. 712 p. [In Russ.].
13. Bermant A. F., Aramanovich I. G. A short course in mathematical analysis: Textbook for universities. 11th ed., St. Petersburg, 2005. 736 p. [In Russ.].
14. Ovsyannikov L. V. Group analysis of differential equations. M., 1978. 399 p. [In Russ.].
15. Sedov L. I. Methods of similarity and dimension in mechanics. M., 1977. 440 p. [In Russ.].